



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a IX-a – soluții

Problema 1. Fie triunghiul ABC .

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A .

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB . Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_A M} + \overrightarrow{I_A P} = \overrightarrow{I_A N}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Dacă I_A este punctul de intersecție al bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B și C , atunci I_A se află în interiorul unghiului A și este egal depărtat de laturile AB și BC respectiv de BC și AC . Prin tranzitivitate, I_A este egal depărtat de laturile AB și AC ale unghiului A , este interior unghiului A , deci se află pe bisectoarea interioară a unghiului A .

..... 2p

b) Din condiția $\overrightarrow{I_A M} + \overrightarrow{I_A P} = \overrightarrow{I_A N}$ deducem că patrulaterul $I_A MNP$ este paralelogram. De asemenea din punctul a) avem că $I_A M = I_A N = I_A P$, deci $I_A MNP$ este romb iar triunghiurile $I_A NP$ și $I_A MN$ sunt echilaterale.

..... 2p

Astfel, patrulaterul inscriptibil $API_A M$ are $\angle PI_A M = 120^\circ$, deci $\angle A = 60^\circ$.

..... 1p

Pe de altă parte, B este unghi exterior patrulaterului inscriptibil $I_A PBN$ deci $\angle B = \angle PI_A N = 60^\circ$ și C este unghi exterior patrulaterului inscriptibil $I_A MCN$ deci $\angle C = \angle MI_A N = 60^\circ$. Astfel, triunghiul ABC are toate unghiurile de 60° , deci este echilateral.

..... 2p

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Soluție.

a) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} - 0,99$, prin urmare $\{x\} - 0,99 \in \mathbb{Z}$.

..... 1p

Cum $0 < \{x\} < 1$ deducem că $-0,99 < \{x\} - 0,99 < 0,01$ de unde $\{x\} - 0,99 = 0$ deci $\{x\} = 0,99$

..... 1p

De asemenea, din $[x]^2 - [x] = 0$ deducem că $[x] = 0$ sau $[x] = 1$ deci $x \in \{0,99; 1,99\}$.

..... 1p

b) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} + a$. Presupunem, prin absurd, că există $a \leq -1$ pentru care ecuația are soluții reale. Atunci, cum $\{x\} < 1$, avem $[x]^2 - [x] = \{x\} + a < 0$.

..... 2p

Notând $[x] = y \in \mathbb{Z}$, avem $y(y - 1) < 0$, deci $y \in (0, 1)$, ceea ce este absurd.

..... 2p

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x + y + z = 1$, arătați că

a)

$$1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1 - y)(1 - z)}{x^2 + x};$$

b)

$$\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$$

Soluție. a) $1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{x + yz}{x^2 + x} = \frac{1 - y - z + yz}{x^2 + x} = \frac{(1 - y)(1 - z)}{x^2 + x}.$

..... **2p**

b) Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$\frac{(1 - y)(1 - z)}{x(x + 1)} + \frac{(1 - z)(1 - x)}{y(y + 1)} + \frac{(1 - x)(1 - y)}{z(z + 1)} \geq 3$$

adică

$$\frac{(x + z)(x + y)}{x[(x + z) + (x + y)]} + \frac{(y + z)(y + x)}{y[(y + z) + (y + x)]} + \frac{(z + y)(z + x)}{z[(z + y) + (z + x)]} \geq 3.$$

..... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică deducem

$$\begin{aligned} & \frac{(x + z)(x + y)}{x[(x + z) + (x + y)]} + \frac{(y + z)(y + x)}{y[(y + z) + (y + x)]} + \frac{(z + y)(z + x)}{z[(z + y) + (z + x)]} \geq \\ & \geq \frac{9}{\frac{x}{x + y} + \frac{x}{x + z} + \frac{y}{y + z} + \frac{y}{y + x} + \frac{z}{z + y} + \frac{z}{z + x}} = \frac{9}{1 + 1 + 1} = 3. \end{aligned}$$

..... **3p**

Variantă soluție b). Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \left(\frac{1}{x - x^3} + \frac{1}{y - y^3} + \frac{1}{z - z^3} \right) \geq 3.$$

..... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică avem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - x^3} + \frac{1}{y - y^3} + \frac{1}{z - z^3} \geq \frac{9}{(x + y + z) - (x^3 + y^3 + z^3)} = \frac{9}{1 - (x^3 + y^3 + z^3)} = \\ & = \frac{9}{(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)} = \frac{9}{3(x + y)(y + z)(z + x)} = \frac{3}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}. \end{aligned}$$

..... **3p**

și inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea:

$$\text{numărul } f(x) \cdot f(y) \text{ divide numărul } (1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x),$$

pentru orice numere naturale x și y .

Soluție. a) Pentru $x = y = 0$ deducem $f^2(0) \mid 2f(0)$, de unde $f(0) \in \{0, 1, 2\}$ **1p**

Dacă $f(0) = 0$, pentru $y = 0$ avem $0 \mid f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice faptul că f este strict crescătoare. **1p**

Dacă $f(0) = 1$, pentru $y = 0$, avem $f(x) \mid (2x + 1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $f(x) \mid 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ **1p**

Presupunând că $f(k) = 2k + 1$, pentru un k natural oarecare, avem $f(k + 1) \mid 2k + 3$, și cum $f(k + 1) > f(k) = 2k + 1$ obținem $f(k + 1) = 2k + 3$, adică $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ **1p**

Dacă $f(0) = 2$, pentru $y = 0$, avem $2f(x) \mid 2(2x + 1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $\frac{2(2x + 1) + f(x)}{2f(x)} = \frac{2x + 1}{f(x)} + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$ **1p**

Presupunând că $f(k) = 4k + 2$, pentru un k natural oarecare, avem $\frac{2k + 3}{f(k + 1)} + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ și cum

$f(k + 1) > f(k) = 4k + 2$ obținem $0 < \frac{2k + 3}{f(k + 1)} + \frac{1}{2} < \frac{2k + 3}{4k + 2} + \frac{1}{2} \leq 2$. Astfel $\frac{2k + 3}{f(k + 1)} + \frac{1}{2} = 1$, prin urmare $f(k + 1) = 4k + 6$, adică $f(x) = 4x + 2, \forall x \in \mathbb{N}$ **1p**

Ambele funcții verifică proprietatea din enunț. **1p**

Notă. Pentru omiterea cazului $f(0) = 0$ se scade un punct.