

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{ \frac{3x+2}{3} \right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4} \right] = 4 \cdot \left\{ \frac{4y+3}{4} \right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3} \right] = 18.$$

Notățiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a .

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $0 \leq \{a\} < 1$ și $[b]$ este număr întreg, egalitatea $3\{a\} + 4[b] = 18$ are loc doar în cazul $\{a\} = \frac{2}{3}$ și $[b] = 4$ **2p**

Deoarece $0 \leq \{c\} < 1$ și $[d]$ este număr întreg, egalitatea $4\{c\} + 3[d] = 18$ are loc doar în cazurile $\{c\} = 0$, $[d] = 6$ (I), sau $\{c\} = \frac{3}{4}$, $[d] = 5$ (II) **3p**

În cazul (I) obținem $\frac{3x+2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4$, deci $x = 6$, $y = \frac{13}{4}$. În cazul (II) obținem $\frac{3x+2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, deci $x = 5$, $y = 4$. Perechile sunt $(6, \frac{13}{4})$ și $(5, 4)$ **2p**

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a + b + c = 2d$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = d^2$.

Soluție. Dacă $a \geq b \geq c \geq 0$, atunci $d \geq 0$. Avem $d^2 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq a + a + b \leq 2a + 2b + 2c \leq 4d$, cel puțin una dintre inegalități fiind strictă, de unde $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ **2p**

Cazul I: $d = 0$. Atunci $a = b = c = 0$ **1p**

Cazul II: $d = 1$. Atunci $a + b + c = 2$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$, deci $a = b = 1$, $c = 0$ **1p**

Cazul III: $d \in \{2, 3\}$. Pentru $d = 2$ avem posibilitățile $(2, 1, 1)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(4, 0, 0)$, iar pentru $d = 3$ avem posibilitățile $(3, 2, 1)$, $(3, 3, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(4, 1, 1)$, $(5, 1, 0)$, $(6, 0, 0)$; niciuna nu convine **1p**

În cazul în care cel puțin unul dintre numere este negativ, atunci toate sunt mai mici sau egale cu 0, iar $-a, -b, -c, -d$ verifică egalitățile din enunț **1p**

Obținem soluțiile $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, -1, -1)$, $(-1, 0, -1)$, $(-1, -1, 0)$... **1p**

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD . Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N , respectiv E . Dreapta BM intersectează dreapta AD în P , iar mijlocul segmentului BN se notează cu F . Arătați că:

a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;

b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.

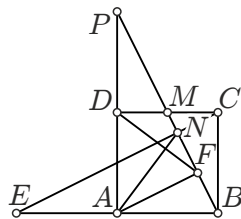
Soluție. a) Deoarece $CB = BA$ și $\angle CEB = \angle BPA$ (au fiecare complement $\angle EBP$), deducem că triunghiurile dreptunghice $\triangle CBE$ și $\triangle BAP$ sunt congruente. **3p**

b) Notăm cu T intersecția dreptelor EC și AP . DM și AT sunt linii mijlocii în triunghiurile dreptunghice APB și BEC , deci A este mijlocul lui BE . Prin urmare $AF \parallel NE$, de unde $AF \perp BP$ **1p**

FD și AN sunt mediane corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri dreptunghice, deci $FD = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BE = AN$ **1p**

$BN = AF$, deoarece sunt înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri congruente, așadar $\triangle ADF \equiv \triangle BAN$ **1p**

Cum $\angle FDA + \angle NAD = \angle NAB + \angle NAD = 90^\circ$, avem $AN \perp DF$ **1p**



Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE , iar cu P mijlocul lui CM . Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

Soluție. Din teorema unghiului de 30° avem $AC = 2AB$.. **1p**

Deoarece $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = 30^\circ$, triunghiul ADC este isoscel, cu $DA = DC$ **1p**

Cum $\sphericalangle ADB = \sphericalangle MBD = 60^\circ$, triunghiul MBD este echilateral. Reiese astfel că $MB = BD = \frac{1}{2}AD$, deci punctul M este mijlocul lui AD **2p**

Notăm cu S simetricul lui D față de B . Atunci triunghiul ADS este echilateral. Reiese $DS = AD = CD$, deci DP este linie mijlocie în triunghiul CSM . Cum $AB = SM$ (mediane în triunghiul echilateral ADS), rezultă $DP = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AC$ **3p**

