



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA , SB , SC și SD se consideră punctele M , N , P , respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

- Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.
- Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Soluție. Fie $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$ și $d_2 = (SBC) \cap (SDA)$. Cum $AB \parallel CD$, $AB \subset (SAB)$ și $CD \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $AB \parallel CD \parallel d_1$. Deoarece $MN \parallel PQ$, $MN \subset (SAB)$ și $PQ \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $MN \parallel PQ \parallel d_1$, prin urmare $AB \parallel CD \parallel MN \parallel PQ \parallel d_1$.

Analog se arată că $BC \parallel DA \parallel NP \parallel QM \parallel d_2$ **3p**

- Folosind teorema fundamentală a asemănării, obținem

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC}.$$

Dacă $ABCD$ este un romb, atunci $AB = BC$. Deducem că $MN = NP$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un romb. **2p**

- Unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Întrucât $MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC$, obținem că $\widehat{MNP} = 90^\circ$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un dreptunghi. ... **2p**

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$ este întreg.

- Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n + 1, n + 3)$ sunt artistice.
- Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x + y + z}$ este întreg.

Soluție. a) Tripletul $(n, n + 1, n + 3)$, $n \in \mathbb{Z}$, este artistic dacă și numai dacă numărul $\frac{3n^2 + 8n + 3}{3n + 4} = n + \frac{4n + 3}{3n + 4}$ este întreg.

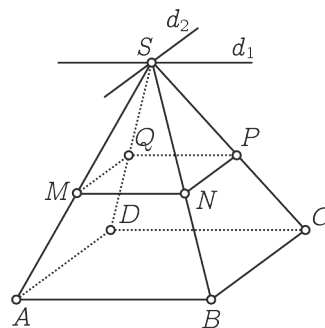
Rezultă că $3n + 4$ divide numărul $4(3n + 4) - 3(4n + 3) = 7$, de unde $n \in \{-1, 1\}$. Se verifică faptul că ambele variante convin (găsim tripletele artistice $(-1, 0, 2)$, respectiv $(1, 2, 4)$). ... **3p**

b) Deoarece numerele $x + y + z$ și $\frac{xy + yz + zx}{x + y + z}$ sunt întregi, rezultă că $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} = (x + y + z) - 2 \cdot \frac{xy + yz + zx}{x + y + z}$ este număr întreg. **2p**

Apoi, $\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{x + y + z} = (xy + yz + zx) \cdot \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} - 2xyz$ este număr întreg. ... **1p**

În concluzie, $\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x + y + z} = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} - 2 \cdot \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{x + y + z}$ este număr întreg. **1p**

Gazeta Matematică



Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:

- (i) $(a^2 + b^2)(c^2 + 2023^2) = (ab + 2023c)^2$;
- (ii) $(a^2 + 2023^2)(b^2 + c^2) = (2023a + bc)^2$;
- (iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

Soluție. Scădem membru cu membru egalitățile (i) și (ii) și obținem, prin calcul direct, că $(a^2 - c^2)(b^2 - 2023^2) = 0$. Cum $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, deducem că $a = c$ sau $b = 2023$ **3p**

Dacă $a = c$, din (i) rezultă $(a^2 - 2023b)^2 = 0$, deci $a^2 = 2023b = 7 \cdot 17^2 \cdot b$. Așadar $7 \mid b$ și $7 \mid a = c$, prin urmare cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este cel puțin egal cu 7, în contradicție cu (iii). **2p**

Dacă $b = 2023$, din (i) rezultă că $(ac - 2023^2)^2 = 0$, deci $ac = 2023^2 = 7^2 \cdot 17^4$.

Ținând cont de (iii), deducem că a și c sunt prime între ele și obținem soluțiile:

$(a, b, c) \in \{(1, 2023, 2023^2), (7^2, 2023, 17^4), (17^4, 2023, 7^2), (2023^2, 2023, 1)\}$ **2p**

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 180^\circ$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC . Demonstrați că $AB = AC$ și $DB = DC$.

Soluție. Fie BE și CF înălțimile din B , respectiv C ale triunghiului ABC , iar H punctul lor de intersecție.

Din teorema celor trei perpendiculare, obținem că $DE \perp AC$ și $DF \perp AB$ **1p**

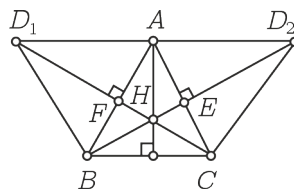
Desfășurăm tetraedrul în planul (ABC) . Notăm cu D_1 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAB și cu D_2 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAC **1p**

Perpendicularitățile $DE \perp AC$ și $DF \perp AB$ se mențin și pe desfășurare. Deducem că, pe desfășurare, punctele D_1, F și C , respectiv D_2, E și B sunt coliniare. **1p**

Din $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ rezultă că punctele D_1, A și D_2 sunt coliniare; evident că A este mijlocul segmentului D_1D_2 **1p**

Deoarece $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$, dreptele D_1D_2 și BC sunt paralele, așadar patrulaterul D_1D_2CB este un trapez, ale cărui diagonale se intersectează în H . Dreapta AH trece prin mijlocul bazei mari, deci conține și mijlocul bazei mici BC . Dar AH este înălțime a triunghiului ABC . Fiind și mediană, urmează că triunghiul ABC este isoscel, cu $AB = AC$ **2p**

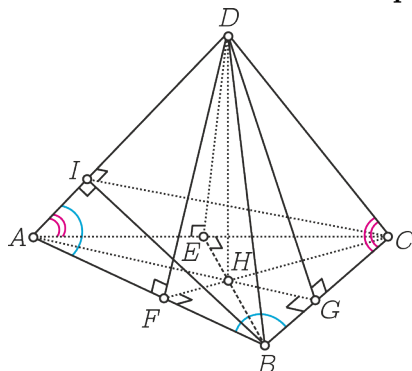
Dreapta AH este mediatoarea comună a bazelor trapezului D_1D_2CB , așadar acesta este un trapez isoscel. Astfel, $D_1B = D_2C$, deci $DB = DC$ **1p**



Soluție alternativă. Din $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 180^\circ$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$ și $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ rezultă că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}$ **1p**

Fie H ortocentrul triunghiului ABC , BE, CF și AG înălțimile triunghiului ABC . Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $DE \perp AC, DF \perp AB$ și $DG \perp BC$ **1p**

Triunghiurile ABG și DAF sunt asemenea, așadar avem $\frac{AG}{AB} = \frac{DF}{AD}$, deci $AG \cdot AD = DF \cdot AB$ **1p**



Triunghiurile ACG și DAE sunt asemenea, deci $\frac{AG}{AC} = \frac{DE}{AD}$, adică $AG \cdot AD = DE \cdot AC$. .. **1p**

Așadar $DF \cdot AB = DE \cdot AC$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$ **1p**

Din $AG \perp BC$ și $DG \perp BC$ rezultă $BC \perp (ADG) \Rightarrow BC \perp AD$. Dacă $BI \perp AD$ cu $I \in AD$, atunci $AD \perp (BIC)$ **1p**

Rezultă că $CI \perp AD$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD} \Leftrightarrow BI = CI$, de unde deducem că triunghiurile AIB și AIC sunt congruente, deci $AB = AC$. Analog deducem că triunghiurile DIB și DIC sunt congruente, deci $DB = DC$ **1p**