



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XI-a – soluții

Problema 1. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = e$ și $f(x+y) = e^{3xy} \cdot f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Soluție. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface condițiile din enunț. Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = 0$ atunci $f(x) = f(a + (x - a)) = e^{3a(x-a)} f(a) f(x-a) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Contradicție. Apoi $f(x) = e^{3x^2/4} f^2(x/2) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

Prin logaritmarea relației din enunț, obținem $\ln f(x+y) = 3xy + \ln f(x) + \ln f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, de unde $\ln f(x+y) - \frac{3(x+y)^2}{2} = \left[\ln f(x) - \frac{3x^2}{2} \right] + \left[\ln f(y) - \frac{3y^2}{2} \right]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **2p**

Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x) - \frac{3x^2}{2}$. Din relația anterioară rezultă că funcția g satisface ecuația funcțională Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **1p**

Cum f este continuă, g este continuă. Rezultă $g(x) = g(1)x = \left(\ln f(1) - \frac{3}{2} \right) x = -\frac{x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

Atunci $\ln f(x) - \frac{3x^2}{2} = -\frac{x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $f(x) = e^{\frac{x(3x-1)}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcție satisface condițiile din enunț **1p**

Soluție alternativă. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface condițiile din enunț. Atunci $f(1) = f(1)f(0)$, de unde $f(0) = 1$ **1p**

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $f(n) = e^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ (demonstrație prin inducție) **1p**

Pentru $n \in \mathbb{N}$, avem $1 = f(0) = e^{-3n^2} f(n) f(-n)$, de unde obținem $f(-n) = e^{\frac{3(-n)^2 - (-n)}{2}}$.

Deducem $f(n) = e^{\frac{n(3n-1)}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ **1p**

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$, avem $f(nx) = e^{\frac{3n(n-1)x^2}{2}} f^n(x)$ (demonstrație prin inducție după $n \in \mathbb{N}$, pentru $x \in \mathbb{R}$, arbitrar) **1p**

Fie $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, cu $m \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $e^{\frac{m(3m-1)}{2}} = f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = e^{\frac{3n(n-1)}{2} \cdot \frac{m^2}{n^2}} f^n\left(\frac{m}{n}\right)$.

Cum $f(x) = e^{3x^2/4} f^2(x/2) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{1}{n} \left(\frac{m(3m-1)}{2} - \frac{3m^2(n-1)}{2n} \right)} = e^{\frac{r(3r-1)}{2}}$$

..... **2p**

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Există un șir $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere raționale cu $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Din continuitatea funcției f , rezultă $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{r_n(3r_n-1)}{2}} = e^{\frac{x(3x-1)}{2}}$.

Prin urmare, dacă funcția f satisface ipoteza, atunci $f(x) = e^{\frac{x(3x-1)}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcție satisface condițiile din enunț **1p**

Problema 2. Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A + B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1} + B$. Arătați că $\det(AB) = 1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Soluție. Din ipoteză, obținem $I_n = (A + B^{-1})(A^{-1} + B) = 2I_n + AB + B^{-1}A^{-1}$. Rezultă $AB + (AB)^{-1} + I_n = O_n$ **2p**
 Notăm $C = AB$. Avem $C + C^{-1} + I_n = O_n$, sau $C^2 + C + I_n = O_n$ **1p**
 Înmulțind relația de mai sus cu $C - I_n$ obținem $C^3 - I_n = O_n$, deci $C^3 = I_n$ **1p**
 Atunci $(\det C)^3 = 1$. Cum $\det C \in \mathbb{R}$, găsim $\det C = 1$. Prin urmare, $\det(AB) = 1$ **1p**
 Concluzia $\det(AB) = 1$ nu rămâne adevărată în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. De exemplu, alegem matricele inversabile $A = I_2$ și $B = \varepsilon I_2$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Avem $(A + B^{-1})(A^{-1} + B) = (1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon)I_2 = I_2$, dar $\det(AB) = \varepsilon^2 \neq 1$ **2p**

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Presupunem că $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ este o funcție continuă, cu proprietatea că există $c, d \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = a$ și $f(d) = b$. Arătați că funcția $f \circ f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ are cel puțin trei puncte fixe. ($x_0 \in D$ se numește punct fix al funcției $\varphi : D \rightarrow D$ dacă $\varphi(x_0) = x_0$.)

Soluție. Considerăm funcțiile $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = f(x) - x$ și respectiv $h(x) = (f \circ f)(x) - x$, pentru oricare $x \in [a, b]$. Funcțiile f, g și h sunt continue pe $[a, b]$, deci au proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ **1p**
 Distingem două cazuri.

1) $a < c < d < b$.
 Avem $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(c) = a - c < 0$, $g(d) = b - d > 0$ și $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Atunci există punctele $x_1 \in [a, c)$, $x_2 \in (c, d)$ și $x_3 \in (d, b]$ astfel încât $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$, cu $x_1 < x_2 < x_3$. Rezultă că f are cel puțin trei puncte fixe, deci și $f \circ f$ are cel puțin trei puncte fixe **3p**

2) $a < d < c < b$.
 Din $g(d) = b - d > 0$ și $g(c) = a - c < 0$ rezultă că există $x_2 \in (d, c)$ astfel încât $g(x_2) = 0$. Atunci $f(x_2) = x_2$, de unde $(f \circ f)(x_2) = x_2$ **1p**
 Avem $c \in (x_2, b) = (f(x_2), f(d))$. Atunci există $\alpha \in (d, x_2)$ astfel ca $f(\alpha) = c$. Rezultă $h(\alpha) = f(f(\alpha)) - \alpha = f(c) - \alpha = a - \alpha < 0$. Dar $h(a) = f(f(a)) - a \geq 0$. Deducem că există $x_1 \in [a, \alpha)$ astfel ca $h(x_1) = 0$, deci $(f \circ f)(x_1) = x_1$. Avem $d \in (a, x_2) = (f(c), f(x_2))$. Atunci există $\beta \in (x_2, c)$ astfel ca $f(\beta) = d$. Obținem $h(\beta) = f(f(\beta)) - \beta = f(d) - \beta = b - \beta > 0$. Apoi $h(b) = f(f(b)) - b \leq 0$. Deducem că există $x_3 \in (\beta, b]$ astfel ca $h(x_3) = 0$, deci $(f \circ f)(x_3) = x_3$. Cum $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$, rezultă că $f \circ f$ are cel puțin trei puncte fixe **2p**

Problema 4. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = B^2 = O_3$. Demonstrați că $AB = BA$ implică $AB = O_3$. Arătați că implicația reciprocă este falsă.

Soluție. Presupunem $AB = BA$.
 Atunci $(A + B)^2 = 2AB$. Rezultă $(A + B)^3 = 2AB(A + B) = 2A^2B + 2AB^2 = O_3$ **2p**
 Apoi, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = O_3$. Din inegalitatea lui Sylvester pentru ranguri, obținem $\text{rang}(A + B) + \text{rang}(A - B) \leq 3$. Astfel, $\text{rang}(A + B) \leq 1$ sau $\text{rang}(A - B) \leq 1$ **1p**
 Presupunem $\text{rang}(A + B) \leq 1$.
 Dacă $\text{rang}(A + B) = 0$, deci $A + B = O_3$, atunci $AB = -A^2 = O_3$ **1p**

Dacă $\text{rang}(A+B) = 1$, atunci există două matrice nenule, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ și $D \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, astfel încât $A+B = CD$. Rezultă $(A+B)^2 = (CD)(CD) = C(DC)D = \text{Tr}(A+B)(A+B)$. Obținem $O_3 = (A+B)^3 = \text{Tr}(A+B)(A+B)^2$. Dacă $\text{Tr}(A+B) \neq 0$ atunci $(A+B)^2 = O_3$, iar dacă $\text{Tr}(A+B) = 0$ atunci din $(A+B)^2 = \text{Tr}(A+B)(A+B)$ obținem de asemenea $(A+B)^2 = O_3$. Rezultă $AB = O_3$ **1p**

Cazul $\text{rang}(A-B) \leq 1$ se tratează analog, pe baza relațiilor $(A-B)^2 = -2AB$ și $(A-B)^3 = O_3$ **1p**

Contraexemplu pentru implicația reciprocă. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Avem $A^2 = B^2 = AB = O_3$, dar $AB \neq BA$ **1p**