

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023****CLASA a XI-a**

Problema 1. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = e$ și $f(x+y) = e^{3xy} \cdot f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A + B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1} + B$. Arătați că $\det(AB) = 1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Presupunem că $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ este o funcție continuă, cu proprietatea că există $c, d \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = a$ și $f(d) = b$. Arătați că funcția $f \circ f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ are cel puțin trei puncte fixe. ($x_0 \in D$ se numește punct fix al funcției $\varphi : D \rightarrow D$ dacă $\varphi(x_0) = x_0$.)

Problema 4. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = B^2 = O_3$. Demonstrați că $AB = BA$ implică $AB = O_3$. Arătați că implicația reciprocă este falsă.

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*