MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Slobozia/Ialomița, 10-13 aprilie 2023

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Slobozia, 11 aprilie 2023

CLASA a V-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Numărul natural nenul n este pătrat perfect. Prin împărțirea lui 2023 la n se obține restul $223 - \frac{3}{2} \cdot n$. Aflați câtul împărțirii.

Soluție. Notăm cu c câtul împărțirii. Din teorema împărțirii cu rest deducem că are loc egalitatea $2023 = n \cdot c + 223 - \frac{3}{2} \cdot n$, (1) **2p**

Deoarece restul $223 - \frac{3}{2} \cdot n$ este număr natural, rezultă că n este par și $0 \leqslant 223 - \frac{3}{2} \cdot n < n$.

Din $0 \leqslant 223 - \frac{3}{2} \cdot n$ rezultă că $n \leqslant \frac{446}{3}$, deci $n \leqslant 148$ **1p**

iar din $223 - \frac{3}{2} \cdot n < n$ deducem că $n > \frac{446}{5}$, adică $n \geqslant 90$ **1p**

Deci n este un pătrat perfect par, cuprins între 90 și 148, deci n poate fi 100 sau 144 ...... **1p**

Din relația (1) rezultă că $(2c - 3)n = 3600$. Pentru $n = 100$ obținem $2c - 3 = 36$, nu convine, deoarece $2c - 3$ este impar. Pentru $n = 144$ se obține $c = 14$ **2p**

Problema 2. Spunem că un număr natural este *special* dacă toate cifrele sale sunt nenule și oricare două cifre alăturate din scrierea sa zecimală sunt consecutive (nu neapărat ordonate crescător).

a) Determinați cel mai mare număr special m care are suma cifrelor egală cu 2023.

b) Determinați cel mai mic număr special n care are suma cifrelor egală cu 2022.

Soluție. a) Cel mai mare număr m va avea cât mai multe cifre, astfel că vom alege cele mai mici cifre posibile. Cum lângă o cifră de 1 nu putem pune decât o cifră de 2, iar $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, alegem numărul cu 674 cifre de 2 și 675 cifre de 1. Astfel, cel mai mare număr special cu suma cifrelor egală cu 2023 este $m = \underbrace{12121\ldots121}_{1349 \text{ cifre}}$ **2p**

b) Deoarece $8 + 9 = 17$ și $2022 = 17 \cdot 118 + 16$, dacă în scrierea numărului n am utiliza cel mult 237 de cifre, atunci suma cifrelor lui n ar fi cel mult egală cu $118 \cdot (8 + 9) + 9 < 2022$, deci nu putem folosi mai puțin de $2 \cdot 118 + 2 = 238$ cifre.

Pentru a folosi exact 238 de cifre, trebuie să formăm 118 grupe de cifre 8 și 9 și încă două cifre cu suma 16, adică fie 9 și 7, fie 8 și 8. Dacă cele două cifre sunt 7 și 9, vom avea 120 de cifre impare și 118 cifre pare, iar dacă cele două cifre sunt ambele 8, vom avea 120 de cifre pare și 118 cifre impare.

Niciunul dintre cazuri nu convine, deoarece în scrierea unui număr special cifrele pare alternează cu cele impare, deci numărul de cifre pare fie este egal, fie diferă cu o unitate de numărul cifrelor impare **2p**

În concluzie, în scrierea numărului n se folosesc cel puțin 239 de cifre. Vom căuta trei cifre consecutive, mai mici decât 8, a căror sumă să fie cel puțin egală cu 16, care să fie primele cifre ale numărului. Încercăm să alegem o primă cifră cât mai mică posibil. Secvențele 123, 234, 345, 456 nu convin, pentru că suma cifrelor este mai mică decât 16.

Secvența 567 conduce la cel mai mic număr special $n = 56787\underbrace{8989\ldots89}_{117\ \text{grupe}}$. **3p**

Problema 3. Determinați numerele naturale m și n știind că

$$n \cdot (n+1) = 3^m + s(n) + 1182,$$

unde $s(n)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural n.

Notă. Pentru un număr natural a, scris cu o singură cifră, se consideră $s(a) = a$.

Soluție. Numărul $n - s(n)$ este divizibil cu 9, iar 1182 este divizibil cu 3, dar nu și cu 9. Dacă $m \geqslant 2$, din egalitatea $n^2 = 3^m + 1182 - \big(n - s(n)\big)$, deducem că n^2 se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, imposibil. Așadar, $m \leqslant 1$ **2p**

Pentru $m = 1$ obținem $n^2 = 1185 - \big(n - s(n)\big)$, de unde rezultă din nou că n^2 se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, imposibil **1p**

Pentru $m = 0$ obținem $n^2 + \big(n - s(n)\big) = 1183$, (1). Rezultă că $n^2 \leqslant 1183$ și, cum $34^2 < 1183 < 35^2$, deducem că $n \leqslant 34$ **1p**

Dacă $n \leqslant 9$, atunci $s(n) = n$, iar din (1) rezultă că $n^2 = 1183$, nu convine, deoarece 1183 nu este pătratul unui număr natural.

Dacă $n \geqslant 10$, notând $n = \overline{ab}$, din (1) rezultă că $\overline{ab}^{\,2} + 9a = 1183$. Cum $n \leqslant 34$, cifra a poate lua doar valorile 1, 2 sau 3. Analizând pe rând cazurile $a = 1$, $a = 2$ și $a = 3$, obținem că singura soluție a problemei este $m = 0$, $n = 34$ **3p**

Problema 4. Spunem că un număr natural $n \geqslant 2$ are proprietatea (P) dacă în descompunerea sa în factori primi cel puțin unul dintre factori are exponentul egal cu 3.

a) Determinați cel mai mic număr natural N cu proprietatea că, oricum am alege N numere consecutive, cel puțin unul dintre acestea are proprietatea (P).

b) Determinați cele mai mici 15 numere naturale consecutive $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$, care nu au proprietatea (P), pentru care suma numerelor $5a_1, 5a_2, \ldots, 5a_{15}$ este un număr cu proprietatea (P).

Soluție. a) Prin împărțirea a 16 numere naturale consecutive la 16 se obțin resturile 0, 1, 2, 3, ..., 15 (nu neapărat începând cu 0). Ca urmare, printre orice 16 numere naturale consecutive există un număr de forma $16k + 8 = 2^3 \cdot (2k+1)$, deci un număr cu proprietatea (P). **2p**

Printre cele 15 numere naturale consecutive de la 9 la 23 nu există niciun număr cu proprietatea (P), deci $N = 16$ **1p**

b) Notăm $S = 5a_1 + 5a_2 + \ldots + 5a_{15}$. Cum $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 + 2$, ..., $a_{15} = a_1 + 14$, rezultă $S = 5 \cdot (15a_1 + 1 + 2 + \ldots + 14) = 5(15a_1 + 105) = 3 \cdot 5^2 \cdot (a_1 + 7)$ **1p**

Cum numerele consecutive $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ nu au proprietatea (P), niciunul dintre acestea nu poate da restul 8 la împărțirea cu 16. Deducem că a_1 are forma $16k + 9$, unde k este un număr natural. **2p**

Ca urmare, $S = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot (k+1)$. Cel mai mic număr k pentru care S are proprietatea (P) este $k = 4$, pentru care avem $S = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$ și $a_1 = 73$. Se verifică imediat că secvența 73, 74, 75, ..., 87 este formată din 15 numere naturale consecutive care nu au proprietatea (P) **1p**