MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 11 aprilie 2023

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. Pentru n număr natural definim

$$a_n = \{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{n+1}\} + \{\sqrt{n+2}\} - \{\sqrt{n+3}\}.$$

a) Arătați că $a_1 > 0{,}2$.

b) Arătați că $a_n < 0$ pentru o infinitate de valori ale lui n și $a_n > 0$ pentru o infinitate de valori ale lui n. (*Notația $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.*)

Soluție. a) $a_1 = 0 - \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + 0 = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ **1p**

Cum $\sqrt{3} > 1{,}7$ și $\sqrt{2} < 1{,}5$, rezultă cerința **1p**

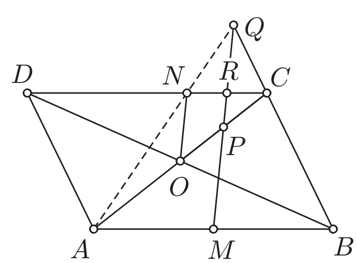
b) Observăm că, dacă m este număr natural și $m^2 \leq a < b < (m+1)^2$, atunci $[\sqrt{a}] = [\sqrt{b}] = m$ și $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, deci $\{\sqrt{a}\} = \sqrt{a} - m < \sqrt{b} - m = \{\sqrt{b}\}$ **1p**

Astfel, dacă $m \geq 2$ este un număr natural și $m^2 \leq n < n+1 < n+2 < n+3 < (m+1)^2$, atunci $\{\sqrt{n}\} < \{\sqrt{n+1}\}$ și $\{\sqrt{n+2}\} < \{\sqrt{n+3}\}$, deci $a_n < 0$ **2p**

Apoi, dacă $m \geq 2$ este un număr natural și $m^2 < n < n+1 < n+2 < n+3 = (m+1)^2$, atunci $\{\sqrt{n+1}\} < \{\sqrt{n+2}\}$, $\{\sqrt{n}\} \geq 0$ și $\{\sqrt{n+3}\} = 0$, deci $a_n > 0$ **2p**

Problema 2. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este intersecția diagonalelor sale, iar M este mijlocul laturii AB. Fie P un punct al segmentului OC și Q intersecția dreptelor MP și BC. Paralela prin O la MP intersectează dreapta CD în punctul N. Arătați că punctele A, N și Q sunt coliniare dacă și numai dacă P este mijlocul segmentului OC.

Soluție. Fie R intersecția dreptelor QM și CD.



Dacă A, N, Q sunt coliniare, atunci, cu teorema fundamentală a asemănării, $\frac{CR}{MB} = \frac{QC}{QB} = \frac{CN}{AB}$ și, cum $AB = 2 \cdot MB$, reiese $CN = 2 \cdot CR$ **2p**

Din $RP \parallel ON$ deducem că RP este linie mijlocie în $\triangle CON$, deci P este mijlocul lui OC **2p**

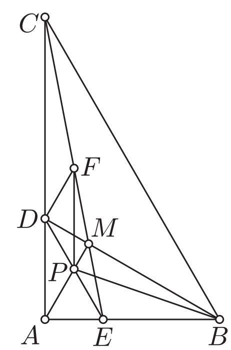
Reciproc, dacă P este mijlocul lui OC, atunci RP este linie mijlocie în $\triangle CON$, deci $CN = 2 \cdot CR$ **1p**

Fie N' intersecția dreptelor AQ și CD. Atunci, ca mai sus, $CN' = 2 \cdot CR = CN$, deci N coincide cu N', adică A, N, Q sunt coliniare **2p**

Problema 3. Se consideră un triunghi ABC care are $\sphericalangle BAC = 90°$ și $\sphericalangle ABC = 60°$. Luăm punctele D și E pe laturile AC, respectiv AB, astfel încât $CD = 2 \cdot DA$ și DE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$. Notăm cu M intersecția dreptelor CE și BD, iar cu P intersecția dreptelor DE și AM. Arătați că:

a) dreptele AM și BD sunt perpendiculare;

b) $3 \cdot PB = 2 \cdot CM$.



Soluție. a) Fie $AB = a$. Atunci $BC = 2a$ (teorema unghiului de 30°), $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, $AD = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{2a}{3}\sqrt{3} = 2AD$. Rezultă, conform reciprocei teoremei unghiului de 30°, că $\sphericalangle ABD = 30°$, deci $\sphericalangle ADB = 60°$ **2p**

Obținem $\sphericalangle ADE = 30° = \sphericalangle ACB$, deci $DE \parallel BC$. Astfel $\triangle DME \sim \triangle BMC$ și $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, de unde $\frac{DM}{MB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. Deducem $\frac{DM}{DB} = \frac{1}{4}$, de unde $\frac{DM}{DA} = \frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$, deci $\triangle DMA \sim \triangle DAB$ (L.U.L.), ceea ce implică $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAD = 90°$ **2p**

b) Fie $DF \parallel AM$, $F \in CE$. Atunci $\frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3}$; avem de arătat că $CF = PB$. **1p**

Avem $\sphericalangle DAM = 90° - \sphericalangle ADB = 30°$ și $\sphericalangle ADE = 30°$, deci $DP = AP$. Din $\triangle DPM$ reiese $PM = \frac{1}{2}DP = \frac{1}{2}AP$, de unde $\frac{MP}{MA} = \frac{1}{3} = \frac{MF}{MC}$, ceea ce arată că $PF \parallel AC$. Deducem că $APFD$ este paralelogram, de unde $DF = AP = DP$. Cum $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DAM = 30° = \sphericalangle BDP$ și $BD = \frac{2a}{3}\sqrt{3} = CD$, obținem $\triangle CDF \equiv \triangle BDP$ (L.U.L.), deci $CF = BP$, c.c.t.d **2p**

Problema 4. a) Arătați că există numerele iraționale a, b, c astfel încât numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ să fie raționale.

b) Arătați că, dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a + b + c = 1$ și numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ sunt raționale și nenule, atunci numerele a, b, c sunt raționale.

Soluție. a) Dacă luăm $a = b = c$ astfel încât a să fie irațional și $a^2 + a$ să fie rațional, cerința este demonstrată. Aceasta se întâmplă dacă, de exemplu, $a = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ **1p**

b) Cum $b + ac$ și $c + ab$ sunt raționale, este rațional și numărul $b + c + ac + ab = (b + c)(1 + a) = (1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, deci a^2 este rațional **2p**

Analog, b^2 și c^2 sunt raționale. Cum $(a + bc)^2 = a^2 + b^2c^2 + 2abc$ este rațional, rezultă că abc este rațional **2p**

Așadar $a(a + bc) = a^2 + abc$ este rațional și, cum $a + bc$ este rațional nenul, deducem că a este rațional. Analog, b și c sunt raționale **2p**

Soluție alternativă la b). Fie $b + ac = r$, $c + ab = q$, cu r și q numere raționale. Atunci $b + ac - a(c + ab) = r - qa$, sau $b(1 - a^2) = r - qa$; analog $c(1 - a^2) = q - ra$. Astfel, dacă a este rațional și $a \neq \pm 1$, atunci $b = \frac{r - qa}{1 - a^2}$ și $c = \frac{q - ra}{1 - a^2}$ sunt raționale **1p**

Dacă $a = 1$, atunci $b + c = 0$, deci $ab + c = 0$ − contradicție cu ipoteza, iar dacă $a = -1$, atunci $b + c = 2$ și $b - c = p$, deci $b = 1 + \frac{p}{2}$ și $c = 1 - \frac{p}{2}$ sunt raționale **1p**

O concluzie similară funcționează dacă, în raționamentul precedent, înlocuim a cu b sau cu c. Astfel, rămâne de eliminat cazul când a, b și c sunt iraționale.

Presupunem că a, b și c sunt iraționale (†). Cum $b + ac$ și $c + ab$ sunt raționale, este rațional și numărul $b + c + ac + ab = (b + c)(1 + a) = (1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, deci a^2 este rațional, adică $a = \pm\sqrt{m}$, cu $m \in \mathbb{Q}_+$ și $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$ **2p**

Analog, $b = \pm\sqrt{n}$, $c = \pm\sqrt{p}$, cu n, p raționale și $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ iraționale.

Din $a+b=1-c$ reiese $a^2+2ab+b^2=1-2c+c^2$, adică $m\pm 2\sqrt{mn}+n=1\pm 2\sqrt{p}+p$. Cum $\sqrt{p}$ este irațional, egalitatea precedentă este posibilă doar dacă $\sqrt{mn}=\sqrt{p}$ (și cei doi termeni cu radicali au același semn), adică $mn=p$. La fel obținem $mp=n$ și $np=m$, de unde $mnp=m^2=n^2=p^2$, deci $m=n=p$, ceea ce duce la $m=n=p=1$ – contradicție cu (†). Așadar presupunerea (†) este falsă și raționamentul se încheie **2p**