Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XII-a – soluții și bareme

Problema 1. *Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordinul $n\in\mathbb{N}^*$, unde $n\geq 2$. Vom spune că grupul $(G,\cdot)$ este* aranjabil *dacă există o ordonare a elementelor sale, astfel încât*

$$G=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots,a_n\}=\{a_1\cdot a_2,a_2\cdot a_3,\ldots,a_k\cdot a_{k+1},\ldots,a_n\cdot a_1\}.$$

a) *Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ este aranjabil.*
b) *Dați un exemplu de grup de ordin par care este aranjabil.*

Soluție:
a) Vom arăta că grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ este un grup aranjabil dacă și numai dacă n este un număr natural impar.
Dacă $(G,\cdot)$ este un grup aranjabil abelian, atunci considerând aranjarea
$G=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots,a_n\}=\{a_1\cdot a_2,a_2\cdot a_3,\ldots,a_k\cdot a_{k+1},\ldots,a_n\cdot a_1\}$, avem

$$\prod_{g\in G}g=\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}(a_k\cdot a_{k+1})=\left(\prod_{g\in G}g\right)^2,$$

(unde $a_{n+1}=a_1$), astfel că $\prod\limits_{g\in G}g=1$, unde 1 este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$. **2p**
În orice grup abelian finit avem că produsul tuturor elementelor sale este egal cu produsul elementelor sale de ordin 2.
Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, dacă $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ cu $ord(\widehat{k})=2$, înseamnă că

$$\widehat{k}\neq\widehat{0}=\widehat{k}+\widehat{k}=\widehat{2k},$$

adică n divide $2k$, dar nu divide k. Acest lucru este posibil doar dacă n este par și $n=2k$. Astfel, dacă n este par, cu $n=2k$, și $(\mathbb{Z}_n,+)$ ar fi aranjabil, am avea

$$\widehat{0}=\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}x=\widehat{k},$$

ceea ce este fals. Prin urmare, dacă n este par, grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ nu este aranjabil. **1p**
Fie acum n un număr natural impar. Considerăm mulțimea $[0,n-1]_{\mathbb{N}}=\{0,1,\ldots,n-1\}$ și funcția $f:[0,n-1]_{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbb{Z}_n$ definită prin $f(k)=\widehat{2k+1}$. Cum

$$f(k)=f(l)\Longleftrightarrow\widehat{2k+1}=\widehat{2l+1}\Longleftrightarrow n|(2k-2l)\Longleftrightarrow n|(k-l)\Longleftrightarrow k=l,$$

funcția f este injectivă și cum $[0,n-1]_{\mathbb{N}}$ și $\mathbb{Z}_n$ sunt mulțimi finite cu același număr de elemente, rezultă că f este bijectivă. Notând $a_k=\widehat{k-1}$ pentru orice $1\leq k\leq n$ și $a_{n+1}=a_1$,

rezultă atunci că $a_k + a_{k+1} = f(k-1)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, astfel că $\mathbb{Z}_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{f(0), f(1), \ldots, f(k), \ldots, f(n-1)\} = \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{k-1} + a_k, \ldots, a_n + a_1\}$, de unde deducem că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil.
.... **1p**
Mulțimea numerelor naturale cu proprietatea că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil este prin urmare mulțimea numerelor naturale impare. **1p**

b) Conform punctului a), nu există grupuri aranjabile ciclice de ordin par. Considerăm $\mathbb{Z}_4 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$, $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ și grupul $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ cu operația de adunare pe componente $(\widehat{k}, \overline{l}) + (\widehat{m}, \overline{n}) = (\widehat{k+m}, \overline{l+n})$. Atunci

$$G = \{a_1 = (\widehat{0}, \overline{0}), a_2 = (\widehat{1}, \overline{0}), a_3 = (\widehat{1}, \overline{1}), a_4 = (\widehat{3}, \overline{1}), a_5 = (\widehat{2}, \overline{0}), a_6 = (\widehat{2}, \overline{1}), a_7 = (\widehat{0}, \overline{1}), a_8 = (\widehat{3}, \overline{0})\} =$$

$$= \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, a_5 + a_6, a_6 + a_7, a_7 + a_8, a_8 + a_1\},$$

astfel că $(G, +)$ este un grup aranjabil de ordin 8. .... **2p**

Problema 2. *Fie p un număr prim, n un număr natural nedivizibil prin p, iar $\mathbb{K}$ un corp comutativ cu p^n elemente, cu elementul unitate $1_{\mathbb{K}}$ și elementul nul $\widehat{0} = 0_{\mathbb{K}}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm $\widehat{m} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \ldots + 1_{\mathbb{K}}}_{de\ m\ ori}$ și definim polinomul*

$$f_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} X^{p^k} \in \mathbb{K}[X].$$

a) Arătați că mulțimea rădăcinilor polinomului f_1 este $\{\widehat{k} \mid k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$.
b) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Determinați mulțimea rădăcinilor din corpul $\mathbb{K}$ ale polinomului f_m.

Soluție:
a) Pentru orice polinom $P \in \mathbb{K}[X]$ vom nota cu Z_P mulțimea rădăcinilor sale din $\mathbb{K}$. Deoarece $|\mathbb{K}| = p^n$, caracteristica corpului $\mathbb{K}$ este $char(\mathbb{K}) = p$. Atunci $\widehat{m} = \widehat{0}$ pentru orice multiplu m al lui p. În particular, cum $k^p \equiv k \pmod p$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, avem că

$$f_1(\widehat{k}) = \left(\widehat{k}\right)^p - \widehat{k} = \widehat{k^p} - \widehat{k} = \widehat{k^p - k} = \widehat{0},$$

pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Prin urmare, $\{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\} \subseteq Z_{f_1}$. De asemenea, deoarece $\mathbb{K}$ este un corp comutativ, $|Z_{f_1}| \leq grad(f_1) = p$. Rezultă că $Z_{f_1} = \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$. **2p**
b) Deoarece $p | C_p^k$, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$, rezultă că $(a+b)^p = a^p + b^p$, pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$, și inductiv $(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ și orice $k \in \mathbb{N}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$f_m(f_1(X)) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} (X^p - X)^{p^k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} (X^{p^{k+1}} - X^{p^k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} (\widehat{C_m^k} + \widehat{C_m^{k-1}}) X^{p^k} = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \widehat{C_{m+1}^k} X^{p^k} = f_{m+1}(X).$$

$\ldots$ **2p**

Arătăm prin inducție după $m \in \mathbb{N}^*$ că $Z_{f_m} = \{\widehat{k} \,|\, k = \overline{0, p-1}\}$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, ceea ce va rezolva problema. Pentru $m = 1$ am arătat acest lucru la a). Să presupunem acum că proprietatea are loc pentru un $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Demonstrăm că ea are loc atunci și pentru $m + 1$:

Pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ avem

$$f_{m+1}(\widehat{k}) = f_m(f_1(\widehat{k})) = f_m(\widehat{0}) = \widehat{0}\,,$$

astfel că $\{\widehat{k} \,|\, k = \overline{0, p-1}\} \subseteq Z_{f_{m+1}}$. $\ldots$ **1p**

Fie $\alpha \in Z_{f_{m+1}}$ oarecare. Atunci $f_m(f_1(\alpha)) = f_{m+1}(\alpha) = \widehat{0}$, deci $f_1(\alpha) \in Z_{f_m}$. Prin urmare, există $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ astfel încât $f_1(\alpha) = \widehat{k}$. Obținem că

$$\alpha^p = \alpha + \widehat{k}\,,$$

$$\alpha^{p^2} = (\alpha + \widehat{k})^p = \alpha^p + \widehat{k}^p = (\alpha + \widehat{k}) + \widehat{k} = \alpha + 2 \cdot \widehat{k}\,,$$

și, inductiv, dacă $\alpha^{p^m} = \alpha + m \cdot \widehat{k}$, atunci $\alpha^{p^{m+1}} = (\alpha + m \cdot \widehat{k})^p = \alpha + (m+1) \cdot \widehat{k}$. În grupul multiplicativ $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ avem $x^{p^n - 1} = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{K}^*$, astfel că $x^{p^n} = x$ pentru orice element $x \in \mathbb{K}$. Atunci

$$\alpha = \alpha^{p^n} = \alpha + n \cdot \widehat{k}\,,$$

astfel că $n \cdot \widehat{k} = \widehat{0}$. $\ldots$ **1p**

Cum însă n nu se divide prin caracteristica p, rezultă că $\widehat{k} = \widehat{0}$. Dar atunci $f_1(\alpha) = \widehat{0}$ și $\alpha \in Z_{f_1} = \{\widehat{k} \,|\, k = \overline{0, p-1}\}$. Am obținut deci și incluziunea inversă $Z_{f_{m+1}} \subseteq \{\widehat{k} \,|\, k = \overline{0, p-1}\}$ și deci are loc egalitatea $Z_{f_{m+1}} = \{\widehat{k} \,|\, k = \overline{0, p-1}\}$. Proprietatea enunțată are loc atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$. $\ldots$ **1p**

Problema 3. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, două numere reale oarecare. Spunem că o funcție $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă este o funcție integrabilă pe $[a, b]$, cu proprietatea că*

$$f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) = f\left(\frac{x+b}{2}\right) - f(x) \qquad \textit{pentru orice } x \in [a, b].$$

Arătați că pentru orice număr real t există o unică funcție $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(\mathcal{P})$, astfel încât $\int\limits_a^b f(x)\,dx = t$.

Soluție:

Vom arăta că funcțiile cu proprietatea $(\mathcal{P})$ sunt exact funcțiile constante pe intervalul $[a, b]$. Egalitatea din enunț se transcrie echivalent

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f\left(\frac{x+b}{2}\right)\right) \tag{1}$$

Arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [a, b]$ are loc egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} f\left(\frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n}\right). \tag{2}$$

Pentru $n = 1$, aceasta este exact relația (1). Dacă presupunem acum egalitatea adevărată pentru un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [a, b]$, atunci avem

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot a\right) + f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot b\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x + (2^{n+1} - 1 - k)a + kb}{2^{n+1}}\right).$$

.... **3p**

Considerăm pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [a, b]$ oarecare diviziunea

$$\Delta_n = \left(x_0 = a < x_1 = \frac{(2^n - 1)a + b}{2^n} < \cdots < x_k = \frac{(2^n - k)a + kb}{2^n} < \cdots < x_{2^n} = b\right)$$

cu norma $|\Delta_n| = \frac{b-a}{2^n}$ și sistemul de puncte intermediare

$$\xi_{(n)}(x) = \left(\xi_k(x) = \frac{x + (2^n - k)a + (k-1)b}{2^n} \mid k = \overline{1, 2^n}\right).$$

Atunci relația (2) se transcrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x)),$$

unde prin $\sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x))$ am notat suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare $\xi_{(n)}(x)$. Cum funcția f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x)) = \int\limits_a^b f(s)\,ds$, astfel că $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(s)\,ds$ pentru orice $x \in [a, b]$. Orice funcție cu proprietatea $(\mathcal{P})$ este deci constantă

.... **2p**

Reciproc, orice funcție constantă pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă Riemann și verifică egalitatea din enunț. **1p**

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ există atunci o unică funcție cu proprietatea $(\mathcal{P})$, anume $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, finită prin $f(x) = \frac{t}{b-a}$ pentru orice $x \in [a, b]$, astfel încât $\int\limits_a^b f(x)\,dx = t$. **1p**

Problema 4. *Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă, pentru care $f(0) = 0$. Fie $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin*

$$g(x) = f(x) + (x - 1)f'(x) \qquad \textit{pentru orice } x \in [0, 1].$$

a) Arătați că

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0.$$

b) Demonstrați că pentru orice funcție $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, convexă și derivabilă, cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = 1$, are loc inegalitatea

$$\int_0^1 g(\varphi(x))\,dx \leq 0\,.$$

Soluție:

a) Deoarece $g(x) = f(x) + (x-1)f'(x) = ((x-1)f(x))'$, rezultă că

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left.(x-1)f(x)\right|_0^1 = 0.$$

.... **2p**

b) Fie $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ o funcție convexă și derivabilă cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = 1$. Atunci funcția φ' este crescătoare. Funcția f fiind monoton crescătoare și derivabilă, are derivata f' nenegativă. Rezultă că pentru orice $x \in [0,1]$ avem

$$f(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(0)) = \int_0^x f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \leq \varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t))\,dt$$

Integrând în inegalitatea de mai sus, obținem

$$\int_0^1 f(\varphi(x))\,dx \leq \int_0^1 \left(\varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t))\,dt\right)\,dx\,. \tag{3}$$

.... **2p**

Funcția $f' \circ \varphi$ este continuă, fiind compusă de funcții continue, astfel că este primitivabilă și integrabilă, iar o primitivă a sa este funcția $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $\Phi(x) = \int_0^x f'(\varphi(t))\,dt$. Integrând prin părți, avem:

$$\int_0^1 \left(\varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t))\,dt\right)\,dx = \int_0^1 (\varphi'(x) \cdot \Phi(x))\,dx =$$

$$= \left.(\varphi(x) \cdot \Phi(x))\right|_0^1 - \int_0^1 \left(\varphi(x) \cdot \Phi'(x)\right)\,dx =$$

$$= \varphi(1) \cdot \Phi(1) - \varphi(0) \cdot \Phi(0) - \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x))\,dx = \int_0^1 f'(\varphi(x))\,dx - \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x))\,dx\,. \tag{4}$$

.... **1p**

Din definiția funcției g, inegalitatea (3) și identitatea (4) rezultă atunci că

$$\int_0^1 g(\varphi(x))\,dx = \int_0^1 f(\varphi(x))\,dx + \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x))\,dx - \int_0^1 f'(\varphi(x))\,dx \leq 0\,.$$

.... **2p**