OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VI -A

BAREM

Subiectul I : Arătați că fracția $\frac{\overline{abc}\cdot\overline{bcd}\cdot\overline{cda}\cdot\overline{dab}-\overline{cba}\cdot\overline{dcb}\cdot\overline{adc}\cdot\overline{bad}}{\overline{abcd}\cdot\overline{bcda}\cdot\overline{cdab}\cdot\overline{dabc}-(a+b+c+d)^4}$ este reductibilă.

(Gazeta Matematică seria B, 2023)

Notăm: $T_1=\overline{abc}\cdot\overline{bcd}\cdot\overline{cda}\cdot\overline{dab}$, $T_2=\overline{cba}\cdot\overline{dcb}\cdot\overline{adc}\cdot\overline{bad}$, $T_3=\overline{abcd}\cdot\overline{bcda}\cdot\overline{cdab}\cdot\overline{dabc}$..............1p

$\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)=M_9+(a+b+c)$. Analog :

$\overline{bcd}=M_9+(b+c+d)$, $\overline{cda}=M_9+(c+d+a)$, $\overline{dab}=M_9+(d+a+b)$.

$T_1=M_9+(a+b+c)\cdot(b+c+d)\cdot(c+d+a)\cdot(d+a+b)$..2p

Observăm că T_2 va avea aceeași formă, deci $T_1-T_2=M_9$..1p

$T_3=M_9+(a+b+c+d)^4$, ceea ce conduce la faptul că numitorul fracției inițiale este M_9........................2p

În concluzie fracția se poate simplifica prin 9..1p

Subiectul II: Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O, OM este bisectoarea unghiului AOB și ON este bisectoarea unghiului COD.

a) Dacă $m(\widehat{MON})=170^\circ$, $m(\widehat{BOC})=140^\circ$, iar punctele A și D sunt interioare unghiului MON, calculează măsura unghiului AOD.
b) Dacă $\widehat{BOC}\equiv\widehat{AOD}$, arată că semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse.

a) $m(\widehat{MOB})+m(\widehat{BOC})+m(\widehat{CON})=360^\circ-170^\circ=190^\circ$..1p

Cum $m(\widehat{BOC})=140^\circ \Rightarrow m(\widehat{MOB})+m(\widehat{CON})=50^\circ$..1p

[OM bisectoarea $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{MOB} \equiv \widehat{MOA}$, [ON bisectoarea $\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{CON} \equiv \widehat{NOD}$……………….1p

$\widehat{MOA} + \widehat{NOD} = 50^\circ$……………………………………………………………………………1p

$\widehat{MON} = \widehat{MOA} + \widehat{AOD} + \widehat{DON} \Rightarrow 50^\circ + \widehat{AOD} = 170^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 120^\circ$………………………1p

b) Dacă $\widehat{BOC} \equiv \widehat{AOD}$, semidreptele OB și OD, respectiv OA și OC sunt perechi de semidrepte opuse……………………………………………………………………………………..1p
$\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ unghiuri opuse la vârf și bisectoarele lor sunt semidrepte opuse…………….1p

Subiectul III: Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ pentru care este adevărată egalitatea: $\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29}$.

Să se arate că are loc relația: $\frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$.

Soluție:

$\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29} \Rightarrow \frac{m+2n}{25} = \frac{n+2p}{39} = \frac{p+2m}{29} = k$ ………………………1 p

$\frac{m+2n}{25} = \frac{n+2p}{39} = \frac{p+2m}{29} = k \Rightarrow \begin{cases} m+2n = 25k \\ n+2p = 39k \\ p+2m = 29k \end{cases}$ ……………………………………………………1 p

$\Rightarrow 3(m+n+p) = 93k \Rightarrow m+n+p = 31k \Rightarrow 2m+2n+2p = 62k$ ……………………………………1 p

$\Rightarrow \begin{cases} (2m+n)+(n+2p) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2m+n = 62k-39k = 23k \\ (2n+p)+(p+2m) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2n+p = 62k-29k = 33k \\ (2p+m)+(m+2n) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2p+m = 62k-25k = 37k \end{cases}$ ………………………………2 p

$\Rightarrow \frac{2m+n}{23} = \frac{2n+p}{33} = \frac{2p+m}{37} = k$ ……………………………………………………………………1 p

$\Rightarrow \frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$ ……………………………………………………1 p

Subiectul IV: Un număr natural n se numește *special* dacă produsul divizorilor săi naturali este egal cu n^3 .

a) Arătați că 12 este număr *special*;
b) Demonstrați că nu există niciun număr natural n, pătrat perfect, cu $n \geq 2$, care să fie și număr *special*.

Soluție:

a) Vom nota cu $P(n)$ produsul divizorilor naturali ai numărului n.

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728 = 12^3 \Rightarrow$ 12 este *special*..............................1 p

b) Dacă n este pătrat perfect atunci are un singur divizor natural, d, cu $d = \frac{n}{d}$, pentru orice alt divizor d' avem $\frac{n}{d'}$ este tot divizor al lui n și $d' \neq \frac{n}{d'}$ ....1 p

$\Rightarrow$ divizorii lui n, diferiți de d, pot fi grupați, doi câte doi, astfel încât produsul divizorilor din fiecare grupă să fie n ....2 p

Dacă prin procedeul de mai sus se obțin k grupe, vom avea $P(n) = n^k \cdot d = d^{2k+1}$ ....2 p

Dacă n ar fi special, am avea $P(n) = n^3 = \left(d^2\right)^3 = d^6$ ....1 p

În acest caz, am avea $d^6 = d^{2k+1}$ ceea ce este imposibil, exponenții fiind de parități diferite.............1p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro