**Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, aprilie 2024**
**Proba E.c)**
**Matematică *M_mate-info***
**Barem de evaluare și de notare**

**Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I** **(30 puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **5p** | **1.** $\log_2 8=3$; $4^{\log_4 9}=9$; $\log_3\left(\log_2 512\right)=\log_3 9=2$ | **3p** |
| | $E=\frac{3+9}{2}=6\Rightarrow$ prima zecimală a numărului $\sqrt{6}$ este 4. | **2p** |
| **5p** | **2.** $T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt{2}\right)^{100-k}\left(\sqrt[3]{6}\right)^{k}=C_{100}^{k}2^{\frac{100-k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{3}}=C_{100}^{k}\cdot 2^{\frac{300-k}{6}}\cdot 3^{\frac{k}{3}}$ | **3p** |
| | $T_{k+1}$ este rațional, deci $k$ este multiplu de 6, $k\in\{0,6,12,\ldots,96\}$. Așadar sunt 17 termeni raționali. | **2p** |
| **5p** | **3.** $x-\sqrt[3]{x-1}=1\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow(x-1)^3=x-1\Rightarrow x-1=0$ sau $(x-1)^2=1$. | **3p** |
| | Obținem soluțiile $x_1=1, x_2=0, x_3=2$, cu suma egală cu 3. | **2p** |
| **5p** | **4.** Mulțimea A are 5 elemente, așadar are $2^5=32$ submulțimi. Eliminând numerele pare, rezultă că mulțimea $\{1,3,5\}$ are $2^3=8$ submulțimi. | **3p** |
| | Mulțimea A are 8 submulțimi care nu conțin numere pare, așadar sunt 32-8=24 submulțimi care conțin cel puțin un număr par. | **2p** |
| **5p** | **5.** $x_B=x_C=1\Rightarrow BC\perp Ox$. Fie $\{D\}=BC\cap Ox$. Cum $A\in Ox$, rezultă că AD este înălțimea din A, deci $O\in AD$. | **2p** |
| | Fie M mijlocul lui AC. $x_M=-\frac{1}{2}$ $y_M=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se arată că $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1\\ x_O & y_O & 1\\ x_M & y_M & 1\end{vmatrix}=0$, așadar B, O, M sunt coliniare, deci $O\in BM$. | **3p** |
| **5p** | **6.** $\sin a+\cos a=1\Big\vert\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin a+\sin\frac{\pi}{4}\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$<br>$\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **3p** |
| | $tg\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}=\pm 1\Rightarrow\left\vert tg\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right\vert=1$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **5p** | **1. a)** $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=A$ | **3p** |
| | $A^2-A=O_2\Rightarrow\text{rang}\left(A^2-A\right)=\text{rang}O_2=0$ | **2p** |
| **5p** | **b)** Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ a.i. $A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\0&0\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| | $\Rightarrow c=0, b=2a-2d \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 0 & d \end{pmatrix}$; $a, d \in \mathbb{R}$ | |
| **5p** | **c)** Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ verifică $X^{2024}=A \Rightarrow X^{2025}=A \cdot X$ și<br>$X^{2025}=X \cdot A \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A$,iar din b) rezultă $X=\begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 0 & d \end{pmatrix}$<br>$detX=a \cdot d$. Din $X^{2024}=A$ și $detA=0 \Rightarrow detX=0 \Rightarrow a \cdot d=0$<br>Dacă $a=0 \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & -2d \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} 0 & -2d^2 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \ldots \Rightarrow X^{2024}=\begin{pmatrix} 0 & -2d^{2024} \\ 0 & d^{2024} \end{pmatrix}=A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (fals)<br>Așadar $a \neq 0$ și din $a \cdot d=0 \Rightarrow d=0 \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=aA \Rightarrow X^{2024}=a^{2024}A^{2024}$. Din $A^2=A \Rightarrow A^{2024}=A$<br>$\Rightarrow X^{2024}=a^{2024} \cdot A$. Dar $X^{2024}=A$.<br>Deducem că $a^{2024}=1$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow X=A$ sau $X=-A$ | **2p**<br><br><br><br><br>**3p** |
| **5p** | **2.**<br>**a)** $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. Se verifică dacă orice element din $\mathbb{Z}_6$ este soluție a ecuației .<br>Suma soluțiilor: $\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=\hat{3}$. | **3p**<br>**2p** |
| **5p** | **b)**<br>$\hat{x}^7=\hat{1} \Rightarrow \hat{x}^6 \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{x}^6=\hat{1} \Rightarrow \hat{x}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_8$.<br>Mulțimea elementelor inversabile în $\mathbb{Z}_8$ este $\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$ și avem: $\hat{1}^2=\hat{3}^2=\hat{5}^2=\hat{7}^2=\hat{1} \Rightarrow \hat{x}^2=\hat{1}$<br>$\hat{x}^7=\hat{x} \cdot \hat{1} \cdot \hat{1} \cdot \hat{1}=\hat{x}$. Din $\hat{x}^7=\hat{1} \Rightarrow \hat{x}=\hat{1}$. | **2p**<br>**3p** |
| **5p** | **c)** $\hat{x}^9=\hat{x}+1 \Rightarrow \hat{x}^9-\hat{x}-\hat{1}=\hat{0} \Rightarrow \widehat{x^9-x-1}=\hat{0} \Rightarrow x^9-x-1 \,\vdots\, 10$<br>$x^9-x-1$ este număr par, fals, deoarece $x^9-x=x\left(x^8-1\right)$ este par. | **2p**<br>**3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **5p** | **1. a)**<br>$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)'(x+2)-\sqrt{x^2-4}(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot (x+2)-\sqrt{x^2-4}}{(x+2)^2}=$<br>$=\frac{x^2+2x-\left(x^2-4\right)}{(x+2)^2 \cdot \sqrt{x^2-4}}=\frac{2(x+2)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-4}}=\frac{2}{(x+2)\sqrt{x^2-4}}$.<br>$x+2<0, \forall x \in (-\infty, -2)$ ;$\sqrt{x^2-4}>0 \Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-\infty, -2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare. | **3p**<br><br><br>**2p** |
| **5p** | **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\lvert x \rvert \cdot \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=-1 \Rightarrow y=-1$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ .<br>$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \frac{-\sqrt{x^2-4}}{-(x+2)}=-\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}}=-\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=-\infty$ ,<br>$x=-2$ asimptotă verticală | **2p**<br><br>**3p** |
| **5p** | **c)**<br>Din *f* strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-1 \Rightarrow f(x)<-1$<br>$\forall x \in (-\infty, -2)$<br>Avem $e^x>0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1<e^x-1, \forall x \in \mathbb{R}$. Așadar $f(x)<-1<e^x-1, \forall x \in (-\infty, -2)$ | **2p**<br><br>**3p** |

| | | |
|---|---|---|
| 5p | **2. a)** $I_0=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg\vert_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\sqrt{3}-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ | **2p** |
| 5p | **b)** $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx\leq 0,\ \ \forall x\in[0,1]\Rightarrow(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. | **2p** |
| | $\frac{x^n}{x^2+x+1}\geq 0, \forall x\in[0,1]\Rightarrow I_n\geq 0$. Avem : $I_0\geq I_1\geq I_2\geq \ldots\geq I_n\geq \ldots\geq 0\Rightarrow(I_n)_{n\geq 0}$ este mărginit | **3p** |
| 5p | **c)** $\frac{x^n}{x^2+x+1}\leq x^n, \forall x\in[0,1]\Rightarrow I_n\leq \int_0^1 x^n dx\Rightarrow I_n\leq \frac{1}{n+1}$ | **3p** |
| | Din $0\leq I_n\leq \frac{1}{n+1}$, aplicând criteriul “cleștelui” $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$ | **2p** |