Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E.c)

Matematică M_mate-info

(SUGESTII DE REZOLVARE cu observații metodice)

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. **Să se arate că numărul $N = \sqrt{3} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ este întreg .**

$$N = \sqrt{3} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3} + \left|2-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} + \left(2-\sqrt{3}\right) = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Obs. Atenție la explicitarea modulului!!!
-este foarte adevărat că în această situație nu influențează rezultatul, dar lipsa explicitării modulului atrage diminuarea punctajului.

2. **Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2x - 1$, unde a este un număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte .**

$f(x) = 0$ are două soluții reale și distincte $<=> \Delta > 0$ și $a^2 - 1 \neq 0$.
Avem că $\Delta = 4 + 4(a^2 - 1) = 4a^2 > 0$ și $a \neq \pm 1$ $<=> \begin{cases} a^2 > 0 \\ a \neq \pm 1 \end{cases} <=>$
$\begin{cases} a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$,deci

$$a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)\,.$$

Observație:

- nu din neștiință, ci din neatenție sau grabă, putem spune rapid că $a^2 > 0 <=> a > 0$ (ceea ce NU este adevărat).

3. **Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 1$.**

Avem condițiile de existență $x \geq 0$ și $x - 1 \geq 0$, deci domeniul ecuației este intervalul $[1, \infty)$.
Prin ridicarea egalității la pătrat se obține

$$x + x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} = 1 <=> 2x + 2\sqrt{x(x-1)} = 2 \ /:2 <=>$$

$\sqrt{x(x-1)} = 1 - x$.
Se ridică la pătrat ultima egalitate și avem că

$$x(x-1) = x^2 - 2x + 1 <=> x = 1 \text{ care convine.}$$

4. **Să se demonstreze că $C_{2n}^{n} = 2C_{2n-1}^{n}$, pentru orice număr natural nenul n .**

Se știe că $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n \geq k$.
Egalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = 2\frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}$ <=>

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = 2\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} / \cdot n! \leq> \frac{(2n)!}{n!} = 2\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \leq> \frac{(2n)!}{(2n-1)!} = 2\frac{n!}{(n-1)!}$$

<=> $2n = 2\cdot n$, ceea ce este adevărat.

5. **În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3), B(8,0)$ și $C(4,-3)$. Arătați că patrulaterul $AOCB$ este romb .**

$O(0,0)$.
$AO = \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2} = 5.$
$OC = \sqrt{(0-4)^2+(0+3)^2} = 5.$
$CB = \sqrt{(4-8)^2+(-3-0)^2} = 5.$
$BA = \sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2} = 5.$
Și cum $AO = OC = CB = BA = 5 => AOCB$ este romb.

6. **Să se arate că $sin\frac{\pi}{12}\cdot cos15^\circ = \frac{1}{4}$.**

$$\frac{\pi}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

Deci avem $sin15^\circ \cdot cos15^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2sin15^\circ\cdot cos15^\circ = \frac{1}{2}\cdot(sin2\cdot 15^\circ) = \frac{1}{2}\cdot sin30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
(am folosit că $sin2x = 2sinxcosx$.)
Obs. Este și varianta de a calcula $sin15^\circ$ și cos15°.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. **Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.**

a) **Să se calculeze $\det\big(A(1,-1)\big)$.**

$\det\big(A(1,-1)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1+1+1+1 = 4$.

b) Demonstrați că $(A(0,0))^3 = I_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$(A(0,0))^3 = [A(0,0) \cdot A(0,0)] \cdot A(0,0)$ (înmulțirea matricelor este asociativă)

$$A(0,0) \cdot A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[A(0,0) \cdot A(0,0)] \cdot A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 .$$

c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $\det(A(m,n)) = 0$.

$$\det(A(m,n)) = \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ 1 & m & n \\ n & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+n+1 & m+n+1 & m+n+1 \\ 1 & m & n \\ n & 1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m+n+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & n \\ n & 1 & m \end{vmatrix} = (m+n+1) \cdot (m^2 + 1 + n^2 - mn - m - n) .$$

$\det(A(m,n)) = 0 \iff (m+n+1) \cdot (m^2 + 1 + n^2 - mn - m - n) = 0 \iff$

I. $m+n+1 = 0$ sau II. $m^2 + 1 + n^2 - mn - m - n = 0$

Deoarece m și n sunt numere naturale $\Rightarrow m + n \geq 0$, deci ecuația $m+n+1 = 0$ NU are soluții (deoarece $m+n+1 \geq 1$) .

Căutăm acum soluții ale ecuației $m^2 + 1 + n^2 - mn - m - n = 0$.

Această ecuație are două necunoscute, în această situație se caută o descompunere în factori sau scrierea membrului stâng ca sumă de pătrate.

$m^2 + 1 + n^2 - mn - m - n = 0 \,/\cdot 2 \iff 2m^2 + 2 + 2n^2 - 2mn - 2m - 2n = 0 \iff$

$\iff (m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1) = 0 \iff$

$\iff (m-n)^2 + (m-1)^2 + (n-1)^2 = 0$. (1)

Dar

$(m-n)^2 \geq 0, (m-1)^2 \geq 0, (n-1)^2 \geq 0$, pentru orice numere naturale m și n. (2)

Din (1) și (2) obținem că $m - n = 0$, $m - 1 = 0$ și $n - 1 = 0$.

Așadar, $m = n = 1$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - (m+1)X - m$, unde m este număr real .

a) Să se arate că $f(0) + m = 0$, pentru orice număr real m .

$$f(0) = 0^3 - (m+1) \cdot 0 - m = 0 - 0 - m = -m .$$

$f(0) + m = -m + m = 0$, pentru orice număr real m .

b) Arătați că, pentru orice număr real m, polinomul f este divizibil cu $X+1$.

$$f \vdots (X+1) <=> f(-1) = 0 .$$

$f(-1) = (-1)^3 - (m+1)\cdot(-1) - m = -1 + m + 1 - m = 0$, pentru orice număr real m .

Obs. Putem efectua pur și simplu împărțirea lui f la $X+1$ (clasic sau folosind schema lui Horner), asigurând divizibilitatea prin rest egal cu zero .

c) Știind că $x_1,\ x_2$ și x_3 sunt numere întregi, demonstrați că numărul m este produsul a două numere naturale consecutive .

Din b) avem că $f \vdots (X+1)$, deci $f = (X+1)\cdot g$, unde g este câtul împărțirii lui f la $X+1$.
Efectuând împărțirea, se obține $g = X^2 - X - m$.
Știm că $x_1,\ x_2$ și x_3 sunt numere întregi, deci și polinomul $g = X^2 - X - m$ are rădăcini întregi.
Cum $g = X^2 - X - m$ are rădăcini întregi => m trebuie să fie număr întreg și $\Delta = 1 + 4m$ pătrat perfect.
Observăm că $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a} = m$ este întreg, fiind produsul a trei numere întregi.
Se mai constată că $\Delta = 1 + 4m$ este număr impar și, cum $\Delta = 1 + 4m$ este și pătrat perfect, obținem
$1 + 4m = (2p+1)^2, p$ este număr natural, adică

$$1 + 4m = 4p^2 + 4p + 1 / -1 <=> 4m = 4p^2 + 4p / :4 <=>$$

$m = p^2 + p = p(p+1), p \in \mathbb{N}$.
Cum p și $p+1$ sunt numere naturale consecutive => m este produsul a două numere naturale consecutive.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + xe^x$.

a) Arătați că, dacă $f'(x) = f(x)$, atunci $x = 0$.

$$f'(x) = (1 + xe^x)' = 0 + x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x).$$

Cum $f'(x) = f(x)$, obținem că $e^x(1+x) = 1 + xe^x$ <=> $e^x + xe^x = 1 + xe^x$ <=> $e^x = 1$, deci $x = 0$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .

$l = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \to -\infty} xe^x$

În

$\lim_{x \to -\infty} xe^x$ apare cazul de excepție $0 \cdot \infty$, pe care-l înlăturăm scriind pe xe^x ca $\frac{x}{e^{-x}}$ (am transformat în cazul $\frac{\infty}{\infty}$ pe care îl vom trata elegant cu $L'H$).

Așadar, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$, deci $l = 0 + 1 = 1$ și $y = 1$ este ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .

c) Determinați valorile reale ale lui a, știind că ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale și distincte .

$f(x) = a <=> f(x) - a = 0$.

Construiesc funcția g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - a$.

Ce trebuie să fac acum?

-să aflu valorile reale ale lui a pentru care ecuația $g(x) = 0$ are exact două soluții reale și distincte. Folosim șirul lui ROLLE:

$g'(x) = f'(x) - a' = f'(x) - 0 = f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$ (din a))

$g'(x) = 0 <=> (1 + x) \cdot e^x = 0$.

$e^x \neq 0$, pentru oricare x real $=> 1 + x = 0 <=> x = -1 \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$1 - a$	$1 - \frac{1}{e} - a$	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$

$g(-1) = f(-1) - a = 1 - 1 \cdot \frac{1}{e} - a = 1 - \frac{1}{e} - a$.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 + xe^x - a) = 1 - a + \lim_{x \to -\infty} xe^x = 1 - a + 0 = 1 - a$.

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} (1 + xe^x - a) = 1 - a + \lim_{x \to \infty} xe^x = 1 - a + \infty = +\infty$.

Deoarece $\lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$, avem deci semnul $+$, rezultă mai departe că ecuația dată admite exact două soluții reale și distincte dacă și numai dacă

$\begin{cases} 1 - \frac{1}{e} - a < 0 \\ 1 - a > 0 \end{cases}$ (pentru că monotonia lui $g(x)$ este evidentă; g este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$ și g *strict descrescătoare pe* $(-\infty, -1)$) $<=> \begin{cases} -a < \frac{1}{e} - 1 \\ -a > -1 \end{cases} <=>$

$\begin{cases} a > 1 - \frac{1}{e} \\ a < 1 \end{cases} <=> a \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=ln\frac{x+5}{x+3}$.

a) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)dx = ln\frac{9}{10}$.

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big/_0^1 = f(1)-f(0) = ln\frac{6}{4} - ln\frac{5}{3} = ln\frac{\frac{6}{4}}{\frac{5}{3}} = ln\frac{6}{4}\cdot\frac{3}{5} = ln\frac{9}{10}\ .$$

Atenție: În foarte multe cazuri, această rezolvare începe prin calculul derivatei funcției f. NU este greșit, dar lucrurile se complică destul de tare.

b) Să se arate că $\int_0^1 (f(x)+\ln(x+3))dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx = ln6$.

$$(f(x)+\ln(x+3)) = ln\frac{x+5}{x+3} + \ln(x+3) = \ln(x+5)-\ln(x+3)+\ln(x+3) =$$
$$= \ln(x+5).$$

$$\int_0^1 (f(x)+\ln(x+3))dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx = \int_0^1 \ln(x+5)\,dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx =$$

$$= \int_0^1 x'\ln(x+5)dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx = xln(x+5)\Big/_0^1 - \int_0^1 x\cdot(\ln(x+5))'dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx$$
$$= 1ln6 - 0ln5$$
$$- \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+5}dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx = ln6 - \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5}dx = ln6.$$

Obs. Aici s-a folosit metoda integrării prin părți.
-în acest caz se poate începe la muncă prin propunerea calculului ambelor integrale, dar se constată că a doua integrala este dată pentru a face lucrurile mai simple decât sunt.

c) Determinați numerele întregi a, b și c pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\ln(2^a\cdot3^b\cdot5^c)$.

Soluție :

$ln\frac{x+5}{x+3} > 0$, pentru oricare $x\in[0,1]$, deci $A = \int_0^1 ln\frac{x+5}{x+3}dx$.

Vom trata această integrală prin două metode, ambele putând fi idei de rezolvare:

Metoda 1.

$$A=\int_0^1 ln\frac{x+5}{x+3}dx=\int_0^1 x'\cdot ln\frac{x+5}{x+3}dx \xrightarrow{p\check{a}r\c{t}i} xln\frac{x+5}{x+3}\Bigg|_0^1-\int_0^1 x\cdot\left(ln\frac{x+5}{x+3}\right)'dx=$$

$$=1ln\frac{6}{4}-0ln\frac{5}{3}$$

$$-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\frac{x+5}{x+3}}\cdot\left(\frac{x+5}{x+3}\right)'dx=$$

$$=ln\frac{3}{2}-\int_0^1 x\cdot\frac{x+3}{x+5}\cdot\frac{(x+5)'\cdot(x+3)-(x+5)\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}dx=$$

$$=ln\frac{3}{2}-\int_0^1 x\cdot\frac{x+3}{x+5}\cdot\frac{x+3-x-5}{(x+3)^2}dx=ln\frac{3}{2}-\int_0^1 x\cdot\frac{x+3}{x+5}\cdot\frac{-2}{(x+3)^2}dx$$

$$=ln\frac{3}{2}-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+5}\cdot\frac{-2}{x+3}dx=ln\frac{3}{2}+2\cdot\int_0^1\frac{x}{(x+3)(x+5)}dx=ln\frac{3}{2}+2B,$$

unde $B=\int_0^1\frac{x}{(x+3)(x+5)}dx$.

Pentru calculul integralei $B=\int_0^1\frac{x}{(x+3)(x+5)}dx$ trebuie să descompunem $\frac{x}{(x+3)(x+5)}$ în fracții simple:

$\frac{x}{(x+3)(x+5)}=\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x+5}=\frac{\alpha(x+5)+\beta(x+3)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(\alpha+\beta)x+5\alpha+3\beta}{(x+3)(x+5)}$, deducem că $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\5\alpha+3\beta=0\end{cases}$. Rezolvând sistemul se obține că $\alpha=-\frac{3}{2}$ și $\beta=\frac{5}{2}$.

Așadar, $\frac{x}{(x+3)(x+5)}=\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x+5}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+5}$ și

$$B=\int_0^1\frac{x}{(x+3)(x+5)}dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+5}\right)dx$$

$$=\left(\frac{-3}{2}\cdot\ln(x+3)+\frac{5}{2}\cdot\ln(x+5)\right)\Bigg|_0^1=\frac{-3}{2}ln4+\frac{5}{2}ln6+\frac{3}{2}ln3-\frac{5}{2}ln5$$

$$=\frac{3}{2}(ln3-ln4)+\frac{5}{2}(ln6-ln5)=\frac{3}{2}ln\frac{3}{4}+\frac{5}{2}ln\frac{6}{5}.$$

$$A = ln\frac{3}{2} + 2B = ln\frac{3}{2} + 3ln\frac{3}{4} + 5ln\frac{6}{5} = ln\frac{3}{2} + ln\left(\frac{3}{4}\right)^3 + ln\left(\frac{6}{5}\right)^5 = ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3^3}{4^3}\cdot\frac{6^5}{5^5}\right)$$
$$= ln\frac{3^4\cdot 2^5\cdot 3^5}{2^7\cdot 5^5} = \ln(2^{-2}\cdot 3^9\cdot 5^{-5}).$$

Dar A $= \ln(2^a\cdot 3^b\cdot 5^c)$ și a, b, c sunt numere întregi, deci

$\boldsymbol{a = -2, b = 9}$ **și** $\boldsymbol{c = -5}$.

Obs. Această metodă nu este imposibilă, dar este destul de dificilă, motiv pentru care propun și

Metoda 2.

$A = \int_0^1 ln\frac{x+5}{x+3}dx = \int_0^1 \ln(x+5)\,dx - \int_0^1 \ln(x+3)\,dx = I_1 - I_2$.

$I_1 = \int_0^1 ln(x+5)dx = \int_0^1 x'\ln(x+5)\,dx = xln(x+5)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot(\ln(x+5))'dx =$

$$= 1ln6 - 0ln5 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+5}dx = ln6 - \int_0^1\frac{x}{x+5}dx = ln6 - \int_0^1\frac{(x+5)-5}{x+5}dx =$$

$$= ln6 - \int_0^1\frac{x+5}{x+5}dx$$
$$+ \int_0^1\frac{5}{x+5}dx = ln6 - x\Big|_0^1 + 5\ln(x+5)\Big|_0^1 = ln6 - (1-0) + 5(ln6 - ln5) =$$

$= ln6 - 1 + 5ln\frac{6}{5}$, deci $\boxed{I_1 = ln6 - 1 + 5ln\frac{6}{5}}$.

În mod asemănător se calculează și I_2, se obține că $\boxed{I_2 = 8ln2 - 1 - 3ln3}$.

$$A = I_1 - I_2 = ln6 - 1 + 5ln\frac{6}{5} - (8ln2 - 1 - 3ln3) =$$
$$= ln2 + ln3 - 1 + 5(ln2 + ln3 - ln5) - 8ln2 + 1 + 3ln3 =$$

$= -2ln2 + 9ln3 - 5ln5 = ln2^{-2} + ln3^9 + ln5^{-5} = \ln(2^{-2}\cdot 3^9\cdot 5^{-5})$, de unde concluzia.

Obs. După cum am spus, metoda a doua este mult mai elegantă.

Mult, mult succes tuturor absolvenților!!!