

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E.c)

Matematică M_mate-info

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Să se arate că numărul $N = \sqrt{3} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ este întreg .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2x - 1$, unde a este un număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 1$.
4. Să se demonstreze că $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, pentru orice număr natural nenul n .
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 3)$, $B(8, 0)$ și $C(4, -3)$. Arătați că patrulaterul $AOCB$ este romb .
6. Să se arate că $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
 - a) Să se calculeze $\det(A(1, -1))$.
 - b) Demonstrați că $(A(0, 0))^3 = I_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $\det(A(m, n)) = 0$.
2. Se consideră x_1 , x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - (m + 1)X - m$, unde m este număr real .
 - a) Să se arate că $f(0) + m = 0$, pentru orice număr real m .
 - b) Arătați că, pentru orice număr real m , polinomul f este divizibil cu $X + 1$.
 - c) Știind că x_1 , x_2 și x_3 sunt numere întregi, demonstrați că numărul m este produsul a două numere naturale consecutive .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + xe^x$.
 - a) Arătați că, dacă $f'(x) = f(x)$, atunci $x = 0$.
 - b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
 - c) Determinați valorile reale ale lui a , știind că ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale și distincte.
2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{x+5}{x+3}$.
 - a) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)dx = \ln \frac{9}{10}$.
 - b) Să se arate că $\int_0^1 (f(x) + \ln(x+3))dx + \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx = \ln 6$.
 - c) Determinați numerele întregi a, b și c pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $\ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c)$.