

BAREM

SUBIECTUL I.

1. Rezultatul calculului $(12 + 2 \cdot 3) \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 12):2$ este egal cu:

- a) 27
- b) 25
- c) 81
- d) 99

Soluție.

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 12):2 = (12 + 6) \cdot 2 - (6 + 12):2 = 18 \cdot 2 - 18:2 = 36 - 9 = 27.$$

De ce am ales să propun acest exercițiu?

- Se greșeste des că $36 - 9 = 25$.

2. Dacă $1,(3) = \frac{x+1}{9}$, atunci x este egal cu:

- a) 12
- b) 2
- c) 13
- d) 11

Soluție.

$$1,(3) = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9}, \text{ deci avem că } \frac{12}{9} = \frac{x+1}{9} \Leftrightarrow x+1 = 12 \Leftrightarrow x = 11.$$

De ce am ales să propun acest exercițiu?

- cu scopul de a recapitula foarte bine fracțiile zecimale periodice.

3. Câtul împărțirii lui 29 la 7 este egal cu:

- a) 1
- b) 3
- c) 4
- d) 7

Soluție.

$$29:7 = 4(\text{cât}), \text{rest } 1.$$

De ce am ales să propun acest exercițiu?

- Să se fixeze clar, pentru toți copiii, care este câtul și care este restul.

4. Dacă n este singurul număr natural din intervalul $(2024, n]$, atunci n este egal cu:

- a) 2024
- b) 2023
- c) **2025**
- d) 0

5. Patru elevi, Ion, Ionuț, Ioana și Ina au determinat mulțimea numerelor naturale nenule n pentru care $\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{5}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ion	Ioana	Ionuț	Ina
$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3\}$

Rezultatul corect a fost obținut de către:

- a) Ion
- b) Ioana
- c) Ionuț
- d) **Ina**

Soluție.

$\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow n + 2 \leq 5$. Cum n este număr natural **nenul**, obținem că $n \in \{1, 2, 3\}$.

Să nu uităm că dintre două fracții ordinare care au același numărător, este mai mare cea cu numitorul mai mic.

6. Mădălin afirmă că: „Numerele 0,5 și 2^{-1} sunt egale” Afirmația lui Mădălin este:

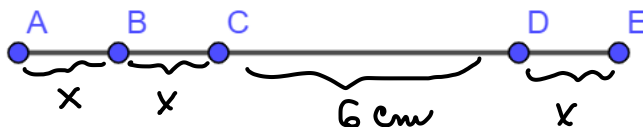
- a) **Adevărată**
- b) Falsă

Soluție.

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

SUBIECTUL al II-lea.

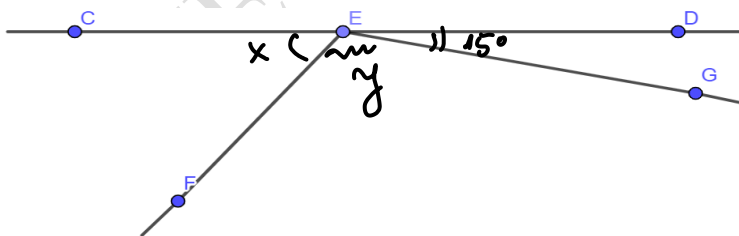
1. În figura alăturată este reprezentat segmentul AE cu lungimea de 12 cm . Pe segmentul AE se află punctele distincte B, C și D astfel încât $AB = BC = DE$ și $CD = 6\text{ cm}$. Lungimea segmentului AC este egală cu:



- a) 2 cm
 b) 6 cm
 c) 4 cm
 d) 3 cm

$AB = BC = DE = x, x > 0$, astfel $x + x + 6 + x = 12 \Leftrightarrow x = 2$, de unde $AC = 4\text{ cm}$.

2. În figura alăturată sunt reprezentate semidreptele opuse EC și ED . Punctele F și G sunt situate de aceeași parte a dreptei CD astfel încât măsura unghiului FEC este egală cu media aritmetică a măsurilor unghiurilor GEF și DEG . Dacă măsura unghiului DEG este egală cu 15° , atunci măsura unghiului FEG este egală cu:



- a) 115°
 b) 105°
 c) 120°
 d) 125°

Notăm $\angle CEF = x$, $\angle FEG = y$ și obținem că $x + y = 165^\circ$ (1).

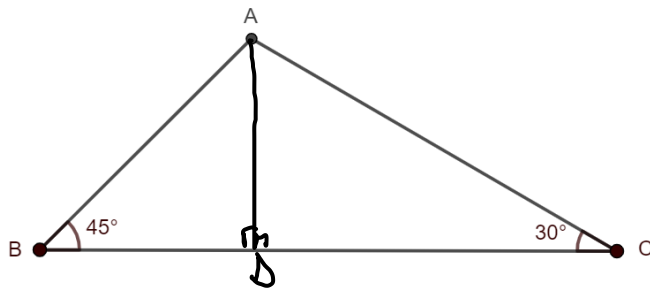
Cum $x = \frac{y+15^\circ}{2} \Leftrightarrow 2x = y + 15^\circ \Leftrightarrow y = 2x - 15^\circ$ (2).

Din (1) și (2) se obține că

$$y = 105^\circ.$$

3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsura unghiului B egală cu 45° și măsura unghiului C egală cu 30° . Dacă $AC = 16 \text{ cm}$, atunci lungimea laturii BC este egală cu:

- a) 8 cm
- b) $8(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$
- c) $8\sqrt{3} \text{ cm}$.
- d) $8(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}$.



Fie $AD \perp BC, D \in BC$.

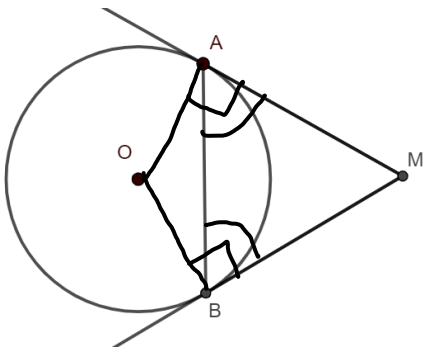
Avem acum că triunghiul ADB este dreptunghic isoscel, iar $AD = \frac{AC}{2} = 8 \text{ cm}$ (Teorema unghiului de 30° în triunghiul ADC), deci și $BD = 8 \text{ cm}$.

Cu T.P. în triunghiul ADC obținem că $DC = 8\sqrt{3} \text{ cm}$. Avem acum că

$$BC = 8 + 8\sqrt{3} = 8(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}.$$

4. În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O . Semidreptele MA și MB sunt tangente cercului de centru O și rază r în punctele A și B . Dacă triunghiul MAB este echilateral, iar distanța de la punctul O la dreapta AB este de 6 cm , atunci raza r a cercului are lungimea de:

- a) 6 cm
- b) $6\sqrt{2} \text{ cm}$
- c) $6\sqrt{3} \text{ cm}$
- d) 12 cm



Știm că tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în Punctul de tangență.

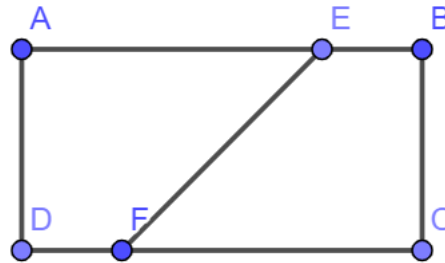
Avem deci că $\angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$.

Cum triunghiul MAB este echilateral, avem că $\angle MAB = \angle MBA = 60^\circ$, deci $\angle BAO = \angle ABO = 30^\circ$.

Triunghiul OAB este isoscel cu baza AB . Deoarece distanța de la O la AB este înălțime și mediană în triunghiul OAB , se obține un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° în care aplicând teorema unghiului de 30° se obține că raza este egală cu $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$.

5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$.

Punctele E și F se află pe segmentele AB , respectiv CD astfel încât EB și DF sunt congruente. Raportul dintre aria trapezului $AEFD$ și aria triunghiului ABC este egal cu:



a) 0,75

b) 1

c) 0,5

d) 1,25

Înălțimea trapezului $AEFD$ este egală cu lățimea dreptunghiului, iar suma bazelor este egală cu lungimea dreptunghiului.

Avem astfel că aria trapezului este egală cu $\frac{l \cdot L}{2} = A_{\Delta ABC}$. Obținem deci că raportul căutat este egal cu 1.

6. Avem $EF \parallel AC$ (EF linie mijlocie în triunghiul ACB) și astfel unghiul este $\sphericalangle ACD = 60^\circ$ (c).

Subiectul al III-lea

1. Maria cheltuiește o sumă de bani în două zile. În prima zi cheltuiește $\frac{3}{7}$ din sumă, iar în a doua zi restul de 36 de lei.

- a) (2p) Este posibil ca suma de bani cheltuită de Maria în a doua zi să reprezinte 45% din întreaga sumă de bani? Justificați răspunsul dat.

Soluție .

Notăm suma de bani cu S .

Este posibil ca $\frac{45}{100} \cdot S = 36$?

Dacă $\frac{45}{100} \cdot S = 36$, atunci $S = \frac{36 \cdot 100}{45} = 80$ lei.

$80 - 36 = 44$ lei (a cheltuit în prima zi) $\neq \frac{3}{7} \cdot 80$, deci NU este posibil.

- b) (3p) Determinați suma de bani cheltuită de Maria în cele două zile.

Soluție .

Cum suma cheltuită în prima zi este $\frac{3}{7} \cdot S$, obținem că pentru a doua zi a rămas restul de $S - \frac{3}{7} \cdot S = \frac{4}{7} \cdot S$, de unde avem că $\frac{4}{7} \cdot S = 36 \Leftrightarrow S = 63$ lei.

SAU

$S = \frac{3}{7} \cdot S + 36$, de unde se află $S = 63$ lei.

SAU

I. $\begin{array}{cccccccccccc} / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / \\ / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / \end{array}$

II. $\begin{array}{cccccccccccc} / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / \\ / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / & - & / \end{array}$

$36 : 4 = 9$ (un segment)

$9 \cdot 7 = 63$ lei (suma de bani) .

2. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x-1}{x-x^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x-1}$, unde x este număr real, $x \neq 0$ și $x \neq 1$.
- (2p) a) Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x}$, pentru orice număr real x , $x \neq 0$ și $x \neq 1$.

Soluție. $\frac{x-1}{x-x^2} = \frac{x-1}{-x(x-1)} = -\frac{1}{x}$ și $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = 1$.

avem că $E(x) = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}$, pentru orice număr real x , $x \neq 0$ și $x \neq 1$.

- 3p) b) Să se calculeze $E(2^2) \cdot E(3^2) \cdot E(4^2) \cdot \dots \cdot E(11^2)$.

Avem din a) că $E(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

$$E(2^2) = \frac{2^2-1}{2^2} = \frac{2^2-1^2}{2^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2}$$

$$E(3^2) = \frac{3^2-1}{3^2} = \frac{3^2-1^2}{3^2} = \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} = \frac{2 \cdot 4}{3^2}$$

$$E(4^2) = \frac{4^2-1}{4^2} = \frac{4^2-1^2}{4^2} = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} = \frac{3 \cdot 5}{4^2}$$

$$E(5^2) = \frac{5^2-1}{5^2} = \frac{5^2-1^2}{5^2} = \frac{(5-1)(5+1)}{5^2} = \frac{4 \cdot 6}{5^2}$$

$$E(6^2) = \frac{6^2-1}{6^2} = \frac{6^2-1^2}{6^2} = \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} = \frac{5 \cdot 7}{6^2}$$

$$E(7^2) = \frac{7^2-1}{7^2} = \frac{7^2-1^2}{7^2} = \frac{(7-1)(7+1)}{7^2} = \frac{6 \cdot 8}{7^2}$$

$$E(8^2) = \frac{8^2-1}{8^2} = \frac{8^2-1^2}{8^2} = \frac{(8-1)(8+1)}{8^2} = \frac{7 \cdot 9}{8^2}$$

$$E(9^2) = \frac{9^2-1}{9^2} = \frac{9^2-1^2}{9^2} = \frac{(9-1)(9+1)}{9^2} = \frac{8 \cdot 10}{9^2}$$

$$E(10^2) = \frac{10^2-1}{10^2} = \frac{10^2-1^2}{10^2} = \frac{(10-1)(10+1)}{10^2} = \frac{9 \cdot 11}{10^2}$$

$$E(11^2) = \frac{11^2-1}{11^2} = \frac{11^2-1^2}{11^2} = \frac{(11-1)(11+1)}{11^2} = \frac{10 \cdot 12}{11^2},$$

$$E(2^2) \cdot E(3^2) \cdot E(4^2) \cdot \dots \cdot E(11^2) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7^2} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8^2} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \cdot \frac{10 \cdot 12}{11^2} =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 12}{11} = (\text{am simplificat factorul al doilea de la produsul de la numărătorul fiecărei fracții cu exponentul puterii de la numitorul fracției următoare})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{11} = \frac{6}{11} \text{ (am continuat simplificările posibile) .}$$

3. a) Punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa Ox este $A(2, 0)$.

Punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa Oy este $B(0, -2)$.

$OA = 2, OB = 2$ și cu teorema lui Pitagora în triunghiul AOB dreptunghic în O , obținem că

$$AB = 2\sqrt{2}.$$

b) Triunghiul AOB este dreptunghic isoscel, deci OC este mediană și înălțime .

Cum punctul D este simetricul punctului C față de punctul O , vom obține că

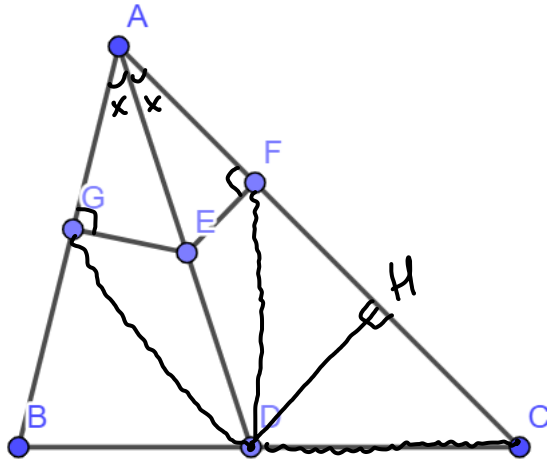
$$CO = OD = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} .$$

$$A_{\Delta DAB} = \frac{AB \cdot DC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4 .$$

$$A_{\Delta DAB} = \frac{DA \cdot d(B, DA)}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sqrt{10} \cdot d(B, AD)}{2} , \text{ de unde vom obține că}$$

$$d(B, AD) = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5} .$$

4. În figura alăturată se consideră triunghiul ABC și semidreapta AD , bisectoarea unghiului BAC , $D \in BC$. Punctul E este mijlocul segmentului AD , iar punctele F și G sunt proiecțiile punctului E pe dreptele AC , respectiv AB .



(2p) a) Arătați că segmentele AG și AF sunt congruente.

Cum AD este bisectoarea unghiului BAC , obținem că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = x$.

$EF \perp AC$, $F \in AC$

$EG \perp AD$, $G \in AB$.

Comparăm triunghiul EAF cu triunghiul EAG :

$$\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAG = x$$

$$\sphericalangle EFA = \sphericalangle EGA = 90^\circ$$

AE ipotenuză comună, obținem că $\Delta EAF \equiv \Delta EAG$ (cazul I.U.) $\Rightarrow AF = AG$.

(3p) b) Demonstrați că, dacă $AC = 3AF$, atunci triunghiul CDG este isoscel.

Fie $DH \perp AC, H \in AC$.

Cum și $EF \perp AC \Rightarrow DH \parallel EF$ (două drepte distincte perpendiculare pe o dreaptă sunt paralele).

Dar E mijloc AD , deci EF este linie mijlocie în triunghiul $ADH \Rightarrow F$ mijloc AH , de aici rezultă că $AF = FH = HC = y$.

În triunghiul FDC , avem că DH este mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle FDC$ isoscel cu baza $FC \Rightarrow$

$$FD = DC = z.$$

Comparăm acum triunghiul GED cu triunghiul FED :

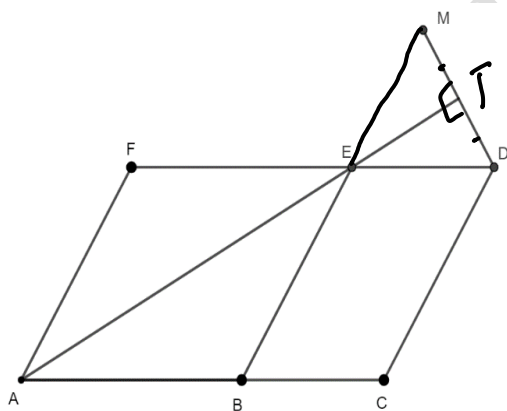
ED latură comună

$EF = EG$ (din a))

$\angle DEF = \angle DEG$ (au același suplement, din a)) $\Rightarrow \triangle GEF \equiv \triangle FED$ (L.U.L.) $\Rightarrow DF = DG = z$.

Deoarece $DG = DC = z$, obținem că triunghiul DGC este isoscel.

5. În figura alăturată este reprezentat un romb $ABEF$ și un paralelogram $BCDE$, astfel încât punctele A, B, C , respectiv D, E, F sunt coliniare, iar $AF = 8$ cm, $DE = 6$ cm și $\angle EAF = 30^\circ$. Punctul M este simetricul punctului D față de dreapta AE .



(2p) a) Arătați că măsura unghiului EDM este egală cu 60° .

Fie $AE \cap MD = \{T\}$.

Din faptul că M este simetricul lui D față de AE , obținem AE mediatoarea segmentului $MD \Rightarrow$

$AT \perp MD$ și T mijlocul segmentului $MD \Rightarrow \angle ETD = 90^\circ$.

$AF = FE$ (laturi romb) $\Rightarrow \triangle AFE$ isoscel, deci $\angle FAE = \angle FEA = 30^\circ$.

Dar $\angle FEA = 30^\circ = \angle TED$ (opuse la vârf).

În triunghiul TED avem că $\angle EDT = \angle EDM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

(3p) b) Demonstrați că punctele B, E și M sunt coliniare.

Triunghiul MED este isoscel (ET este mediană și înălțime), deci ET este și bisectoarea unghiului MED $\Rightarrow \angle TED = \angle TEM = 30^\circ$. Am obținut astfel că $\angle MED = 60^\circ$.

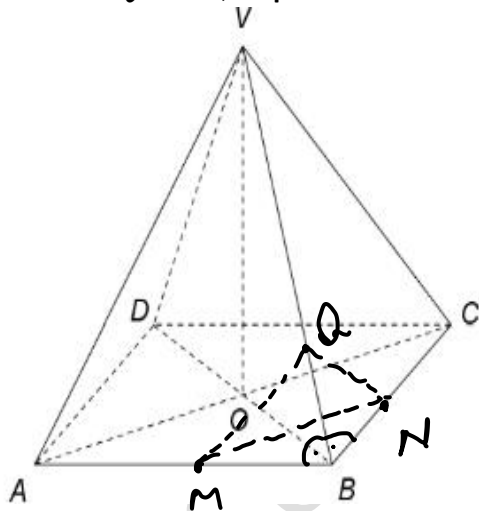
AE diagonală romb $\Rightarrow$ AE bisectoarea unghiului FAB, deci măsura unghiului FAB este de 60° .

Mai departe obținem că $\angle ABE = 120^\circ \Rightarrow \angle EBC = 60^\circ$.

Deoarece BCDE paralelogram, avem că măsura unghiului BED are tot 120° .

Am obținut astfel că $\angle BEM = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow B, E$ și M sunt puncta coliniare.

6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA = 12 \text{ cm}$ și $AB = 12 \text{ cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BC. Punctul Q $\in$ VB astfel încât $MQ \perp VB$, iar punctul O este intersecția dreptelor AC și BD.



(2p) a) Să se calculeze volumul piramidei VABCD.

$$V = \frac{AB^2 \cdot VO}{3}.$$

$VO = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ (se află elegant cu teorema lui Pitagora în triunghiul VOC, dreptunghic în O cu $OC = 6\sqrt{2}$ și $VC = 12 \text{ cm}$).

$$V = \frac{AB^2 \cdot VO}{3} = \frac{144 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

(3p) b) Demonstrați că dreapta VB este perpendiculară pe planul (MNQ).

Comparăm triunghiul MBQ cu triunghiul NBQ:

$$MB = NB = 6 \text{ cm}$$

QB latură comună

$\angle MBQ = \angle NBQ = 60^\circ$ (fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale) $\Rightarrow$

$\triangle MBQ \equiv \triangle NBQ$ (L.U.L.), deci $\angle MQB = \angle NQB = 90^\circ$ (pentru că $MQ \perp VB$) $\Rightarrow NQ \perp VB$.

Avem acum că

$$VB \perp NQ$$

$$VB \perp MQ$$

$$NQ, MQ \subset (MNQ)$$

$$MQ \cap NQ = \{Q\} \text{ , deci } VB \perp (MNQ) \text{ .}$$

MULT SUCCES ÎN CONTINUARE !!!

BAREM SUBJECT GHIULER