marți, 16. iulie 2024

Problema 1. Determinați toate numerele reale α astfel încât, pentru orice număr natural nenul n, numărul întreg

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

este un multiplu al lui n. (Notăm cu $\lfloor z \rfloor$ cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu z. De exemplu, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ și $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Problema 2. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale nenule pentru care există numerele naturale nenule g și N astfel încât egalitatea

$$\operatorname{cmmdc}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

este satisfăcută pentru orice număr natural $n \geqslant N$. (Notăm cu $\operatorname{cmmdc}(x, y)$ cel mai mare divizor comun al numerelor întregi x și y.)

Problema 3. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un șir infinit de numere naturale nenule, și fie N un număr natural nenul. Presupunem că, pentru orice $n > N$, termenul a_n este egal cu numărul aparițiilor lui a_{n-1} în lista $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Demonstrați că cel puțin unul din șirurile $a_1, a_3, a_5, \ldots$ și $a_2, a_4, a_6, \ldots$ este eventual periodic.

(Un șir infinit $b_1, b_2, b_3, \ldots$ se numește *eventual periodic* dacă există numerele naturale p și M astfel încât $b_{m+p} = b_m$ pentru orice $m \geqslant M$.)

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

miercuri, 17. iulie 2024

Problema 4. Fie ABC un triunghi cu $AB < AC < BC$. Notăm cu ω cercul înscris în triunghiul ABC și cu I centrul acestui cerc. Fie X punctul de pe dreapta BC, diferit de C, astfel încât dreapta care trece prin X și este paralelă cu AC este tangentă la ω. Analog, fie Y punctul de pe dreapta BC, diferit de B, astfel încât dreapta care trece prin Y și este paralelă cu AB este tangentă la ω. Dreapta AI intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC în punctul $P \neq A$. Fie K și L mijloacele segmentelor AC și respectiv AB.

Demonstrați că $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problema 5. Melcul Turbo joacă un joc pe o tablă cu 2024 de linii și 2023 de coloane. Există monștri ascunși în 2022 dintre celule. La început Turbo nu știe unde se află monștrii, dar el știe că există exact câte un monstru pe fiecare linie, cu excepția primei linii și ultimei linii, și că pe fiecare coloană se află cel mult un monstru.

Turbo face mai multe încercări de a merge de pe prima linie până la ultima linie. La fiecare încercare el alege o celulă oarecare din prima linie din care pornește, și apoi se mută de fiecare dată într-o celulă adiacentă care are o latură comună. (El are voie să se întoarcă într-o celulă în care a mai fost.) Dacă ajunge într-o celulă în care este un monstru, încercarea lui se termină și revine înapoi la prima linie pentru a începe o nouă încercare. Monștrii nu se mută, iar Turbo ține minte dacă fiecare celulă vizitată are sau nu are un monstru. Dacă el ajunge într-o celulă de pe ultima linie, încercarea lui se termină și jocul se încheie.

Determinați valoarea minimă a lui n pentru care Turbo are o strategie care să îi garanteze că poate ajunge pe ultima linie în a n-a încercare sau mai devreme, indiferent de pozițiile monștrilor.

Problema 6. Fie $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale. O funcție $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se numește *curată* dacă este satisfăcută următoarea proprietate: pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{sau} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Demonstrați că există un număr întreg c astfel încât pentru orice funcție curată f, există cel mult c numere raționale diferite, de forma $f(r) + f(-r)$, unde r este un număr rațional, și determinați cea mai mică valoare posibilă a lui c.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.