MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a IX- a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1

Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x, determinați numărul natural n pentru care:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{\left[\sqrt{k^{12}+4k^6+3}\right]}{k^4-k^2+1}-1\right)=210.$$

Soluție:

$k^{12}+4k^6+3=(k^6+2)^2-1$ 1p

$\left[\sqrt{k^{12}+4k^6+3}\right]=\left[\sqrt{(k^6+2)^2-1}\right]=k^6+1$ 2p

Se obține $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{k^6+1}{k^4-k^2+1}-1\right)=210$ 1p

Avem $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{(k^2+1)(k^4-k^2+1)}{k^4-k^2+1}-1\right)=210 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}k=210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=210$ 2p

$\Rightarrow n^2+n-420=0 \Rightarrow n=20$ 1p

Problema 2

Se consideră numărul real a situat în intervalul (0;1).

a. Determinați intersecția intervalelor $I = \left(\frac{a+1}{2}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ și $J = \left(1; \frac{1}{a}\right)$.

b. Dacă intervalul $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ conține exact trei numere întregi, calculați S=$\left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{a+1}{a}\right] + \left[\frac{2a+1}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{10a+1}{a}\right]$, unde [*x*] reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

Soluție:

a. Dacă $a \in (0;1)$, atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci $0 < a < 1 < \frac{1}{a}$. 1p

Aplicând $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y,\ \forall x, y \in (0;\infty)$, cu $x \leq y$ pentru $x = a$ și $y = 1$, apoi pentru $x = 1$ și $y = \frac{1}{a}$ rezultă $a < \frac{a+1}{2} < 1 < \sqrt{\frac{1}{a}} < \frac{1}{a}$ 1p

Deci $I \cap J = \left(1; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$..1p

b. $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ conține exact trei numere întregi și conform punctului anterior $a < 1 < \frac{1}{a}$ rezultă $a < 1 < 2 < 3 < \frac{1}{a} < 4$, deci $\left[\frac{1}{a}\right] = 3$ 1p

$\left[\frac{na+1}{a}\right] = \left[n + \frac{1}{a}\right] = n + \left[\frac{1}{a}\right] = n + 3$ 1p

Deci $S = 3 + (3+1) + (3+2) + \cdots + (3+10)$ 1p

Finalizare $S = 88$..1p

Problema 3

Se consideră o mulțime $G \subset$ R care satisface simultan proprietățile:

i) $1 \in G$

ii) dacă $x \in G$, atunci $\sqrt{x+2} \in G$.

iii) dacă $\sqrt{x+3} \in G$, atunci $x+4 \in G$.

Arătați că $\sqrt{2021} \in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Soluție:

Demonstrăm prin inducție matematică, că $3n \in G, (\forall)\ n \in N^*$.

P(n): $3n \in G, (\forall)\ n \in N^*$.

I. Verificare pentru n=1

Dacă $1 \in G \Rightarrow \sqrt{1+2} \in G \Rightarrow \sqrt{3} \in G$ (din ii)

$\sqrt{3} \in G \Rightarrow \sqrt{0+3} \in G \Rightarrow 0+4 \in G$(din iii) $\Rightarrow 4 \in G$.

$4 \in G \Rightarrow \sqrt{4+2} \in G$ (din ii) $\Rightarrow \sqrt{6} \in G$.

$\sqrt{6} \in G \Rightarrow \sqrt{3+3} \in G$ (din iii)$\Rightarrow 3+4 \in G \Rightarrow 7 \in G$.

Dacă $7 \in G \Rightarrow \sqrt{7+2} \in G \Rightarrow \sqrt{9} \in G$ (din ii) $\Rightarrow 3 \in G$……………………..............................…3p

II. Demostrație

Presupunem P(k) adevărată ⇒ P(k+1) adevărată, oricare $k \geq 1$.

P(k): $3k \in G, (\forall)\ k \in N^*$.

P(k+1): $3(k+1) \in G, (\forall)\ k \in N^*$.

$3k \in G \Rightarrow \sqrt{3k+2} \in G$ (din ii)

$\sqrt{3k+2} = \sqrt{(3k-1)+3} \in G \Rightarrow 3k-1+4 \in G$(din iii) $\Rightarrow 3k+3 \in G \Rightarrow 3(k+1) \in G$…...2p

Cum $2021 = 3 \cdot 673 + 2$ și $3 \cdot 673 \in G \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 673 + 2} \in G$ (din ii) $\Rightarrow \sqrt{2021} \in G$…….…... 2p

Inspectoratul Școlar Județean Vâlcea

GUVERNUL ROMÂNIEI MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Problema 4

Fie paralelogramul *ABCD* și punctele M, N, P astfel încât $M \in AB,\ N \in BC,\ P \in CD$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DP} = \alpha\overrightarrow{DC},$ unde $\alpha \in R^*$.

a) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, exprimați vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BD}$.

b) Determinați α astfel încât centrul de greutate al triunghiului *MNP* să fie pe dreapta *AC*.

Soluție:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3 \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = 3.$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{3}{1+3} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{-1}{8} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$...1p

$\overrightarrow{BN} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{NC} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{5}{3}$

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{1+\frac{5}{3}} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{-3}{16} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{5}{16} \cdot \overrightarrow{AC}$ 1p

$\overrightarrow{DP} = \alpha \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP} = \alpha \cdot \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow$

$\overrightarrow{OP} = (\alpha - 1)\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{\alpha}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$...1p

b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MNP

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right) \cdot$ 1p

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{-3}{8}\overrightarrow{BD} + \frac{5}{16}\overrightarrow{AC} + \frac{-3}{16}\overrightarrow{BD} + \frac{1-\alpha}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8\alpha+3}{16}\overrightarrow{AC} + \frac{-8\alpha-1}{16}\overrightarrow{BD}\right)$ 1p

$\overrightarrow{OG}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari iar $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari $\Rightarrow \frac{-8\alpha-1}{16} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{8}$ 2p