OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a X - a

Problema 1

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule $\boldsymbol{n}$ verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Problema 2

Considerăm numerele distincte $a, b, c \in (1, \infty)$.

Demonstrați că $ab = c$ dacă și numai dacă $\log_a \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}} b$.

G.M. Supliment – septembrie 2024

Problema 3

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție cu proprietatea $f(f(x)) = x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - x \cdot f(x) + 1$ nu este injectivă.

Problema 4

Se dau numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1 - z_2| = |z_2| = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Calculați $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ și $\frac{z_1}{z_2}$.

b) Arătați ca $E_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice număr natural n, unde $E_n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n}$.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.