MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025
CLASA a XI-a

Problema 1

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_1=\sqrt{2025}$ și $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+2025}{2026}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $1\leq a_n\leq 2025,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-1)$.

Problema 2

a) Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ astfel încât $A^2-A+I_n=O_n$. Calculați $\det\left(A^{2025}+I_n\right)$.

b) Se dau matricele $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică relațiile $A+B=I_n$ și $A^2=A^3$. Arătați că matricea $I_n+A\cdot B$ este inversabilă.

Problema 3

Se dă funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

a) Arătați că $\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}\Big)(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}\left(2^n x\right),(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\mathrm{tg}x)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f}\Big)(\mathrm{tg}x)\right)$, unde $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2^{n+1}},\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 4

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{11}&1&0\\ \frac{1}{8}&\frac{1}{23}&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determinați cel mai mic număr natural $n\geq 1$ cu proprietatea că A^n are toate elementele numere întregi.

G.M. 2024, Traian Preda, București

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp efectiv de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.