MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a VIII - a

Problema 1

a) Arătați că pentru orice numere reale $x, y \in$ R, este adevărată inegalitatea

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

b) Arătați că dacă $a, b > 0, a + b = 1$ atunci

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Problema 2

a) Dacă x, y $\in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2025}$ să se calculeze valoarea expresiei

$$E(x,y)=\sqrt{(x-2025)(y-2025)}$$

b) Să se arate că numărul a $=\sqrt{1+2026\sqrt{1+2023\cdot 2025}}$ este pătrat perfect

Problema 3

Într-o prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$ raportul dintre latura bazei și înălțimea prismei este $\sqrt{2}$.

a) Arătați că $EC \perp FA$.

b) Dacă punctul M este mijlocul muchiei BC, arătați că $(EAC) \perp (AMF)$.

Problema 4

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Notăm proiecțiile vârfului B' pe diagonalele $A'B, BC', A'C'$ cu M, N, respectiv P.

a) Arătați ca $B'M \perp (A'BD')$ și $B'N \perp (ABC')$.

b) Demonstrați că dreptele BP, $A'N$ și $C'M$ sunt concurente.

Gazeta nr.4/2024 –Enunț modificat

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp efectiv de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.