MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a IX- a

Problema 1

Determinați numărul natural n pentru care:
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\left[\sqrt{k^{12}+4k^6+3}\right]}{k^4-k^2+1}-1\right)=210$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Problema 2

Se consideră numărul real *a* situat în intervalul (0;1).

a. Determinați intersecția intervalelor $I=\left(\frac{a+1}{2};\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ și $J=\left(1;\frac{1}{a}\right)$.

b. Dacă intervalul $\left(a;\frac{1}{a}\right)$ conține exact trei numere întregi calculați

S=$\left[\frac{1}{a}\right]+\left[\frac{a+1}{a}\right]+\left[\frac{2a+1}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{10a+1}{a}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

Problema 3

Se consideră o mulțime $G\subset$ R care satisface simultan proprietățile:
i) $1\in G$; ii) dacă $x\in G$, atunci $\sqrt{x+2}\in G$; iii) dacă $\sqrt{x+3}\in G$, atunci $x+4\in G$.
Arătați că $\sqrt{2021}\in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

Problema 4

Fie paralelogramul *ABCD* și punctele *M*, *N*, *P* astfel încât $M\in AB,\ N\in BC,\ P\in CD$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DP}=\alpha\overrightarrow{DC},$ unde $\alpha\in R^*$.

a) Dacă $\{O\}=AC\cap BD$, exprimați vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BD}$.

b) Determinați α astfel încât centrul de greutate al triunghiului *MNP* să fie pe dreapta *AC*.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.