MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN TULCEA

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 08 februarie 2025

Clasa a VII-a

PROBLEMA 1

a) Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{5}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}$.

b) Fie numerele reale

$a=\frac{15}{7\sqrt{6}-2\sqrt{21}}:\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ și $b=\sqrt{\left(9-2\sqrt{21}\right)^2+9+\sqrt{84}}$

Să se arate că $-4a+\frac{b}{\sqrt{7}}\in\mathbb{N}$.

PROBLEMA 2

a) Fie x, y numere reale strict pozitive. Demonstraţi că $\frac{2}{\sqrt{xy}}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\leq\frac{11}{6}$.

PROBLEMA 3

Fie paralelogramul ABCD și M mijlocul laturii AB. Diagonala AC intersectează DM în punctul P.

a) Dacă aria paralelogramului ABCD este de 144 cm^2, calculați aria triunghiului ADP.

b) Dacă R este simetricul lui P față de M și $DT\parallel AR$, $T\in AC$, să se arate că $AD\parallel RT$.

PROBLEMA 4

În triunghiul ABC ducem înălţimea AD, $D\in BC$ și notăm cu M și N mijloacele laturilor AB respectiv AC. Știind că punctele A, M, D și N sunt situate pe un cerc, aflaţi măsura unghiului BAC.

G.M. nr. 10/2024

Notă: Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

Str. Dobrogeanu Gherea nr. 3-4, 820007, Tulcea
Tel: +40 (0)240 51 57 71, +40 (0) 240 51 44 89 Fax: +40 (0)240 51 18 86
E-mail: contact@isjtulcea.ro; www.isjtulcea.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală, 08 februarie 2025

Clasa a VII-a soluţii şi bareme

PROBLEMA 1

a) Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{5}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}$.

b) Fie numerele reale

$a=\frac{15}{7\sqrt{6}-2\sqrt{21}}:\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ şi $b=\sqrt{\left(9-2\sqrt{21}\right)^2}+9+\sqrt{84}$

Să se arate că $-4a+\frac{b}{\sqrt{7}}\in\mathbb{N}$.

Soluţie:

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{14}}=\frac{5}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}$ ……………………………………………………………….1p

$(\sqrt{2}+\sqrt{7})(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})=5\sqrt{14}$……………………………………………………1 p

Finalizare ……………………………………………………………………………………1 p

b) $a=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………………..1 p

$\sqrt{\left(9-2\sqrt{21}\right)^2}=\left|9-2\sqrt{21}\right|=2\sqrt{21}-9$…………....……………...………1 p

$b=4\sqrt{21}$ ……………………………………………………………...………1 p

$-4a+\frac{b}{\sqrt{7}}=0\in\mathbb{N}$ …………………………………………… ……………………1p

PROBLEMA 2

a) Fie x, y numere reale strict pozitive. Demonstraţi că $\frac{2}{\sqrt{xy}}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\leq\frac{11}{6}$.

Soluţie:

a)**Metoda I**

$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$, $\forall$ x, y numere reale strict pozitive ……………………………………….1p

$\frac{2\sqrt{xy}}{xy}\leq\frac{x+y}{xy}$ ……………………………………………………………………..1p

$\frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ……………………………………………………………1p

Metoda a II-a

Se poate aplica inegalitatea între media geometrică și cea aritmetică pentru numerele $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$ (3p)

b) **Metoda I**: Se aplică punctul a) pentru perechile de numere (1, 2), (1, 3) și (2, 3) și obținem:

$\frac{2}{\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………….. 1p

$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq 1 + \frac{1}{3}$ ……………………………………………………………………………………….1p

$\frac{2}{\sqrt{2 \cdot 3}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ……………………………………………………………………………………..1p

Prin adunarea celor trei relații și împărțirea la 2, se obține relația cerută…………………1p

Metoda a II-a:

Raţionalizare și aducere la același numitor……………………………… ………….....1p

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} \leq 11$ ………………………………………………………………... 1p

Aproximare radicali și finalizare ……………………………………………………… .2p

PROBLEMA 3

Fie paralelogramul ABCD și M mijlocul laturii AB. Diagonala AC intersectează DM în punctul P.

a) Dacă aria paralelogramului ABCD este de 144 cm^2, calculați aria triunghiului ADP.
b) Dacă R este simetricul lui P față de M și DT ∥ AR, T∈AC, să se arate că AD ∥ RT.

Soluție:

a) Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $A_{ADO} = \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 144 = 36$ (cm^2)……………………………1 p
P este centru de greutate în triunghiul ADB…………………………………………1 p
$A_{ADP} = \frac{2}{3} \cdot A_{ADO} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$ (cm^2)……………………………………………….1 p

b) P este centru de greutate în triunghiul ADB$\Rightarrow$ PR=DP=$\frac{2}{3} \cdot$ DM ……………………….......1 p

Δ DPT≡ Δ RPA (U.L.U.) $\Rightarrow$DT=AR……………………………………………….. 2 p

ADTR- paralelogram $\Rightarrow$AD ∥ TR……………………………………………..1 p

PROBLEMA 4

În triunghiul ABC ducem înălţimea AD, D $\in$ BC şi notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB respectiv AC. Ştiind că punctele A, M, D şi N sunt situate pe un cerc, aflaţi măsura unghiului BAC.

G.M. nr. 10/2024

Soluţie:

DM mediană în ΔADB dreptunghic ($\measuredangle ADB = 90°$) $\Longrightarrow$ MD = $\frac{AB}{2}$..................................1p

DN mediană în ΔADC dreptunghic ($\measuredangle ADC = 90°$) $\Longrightarrow$ ND = $\frac{AC}{2}$ 1p

ΔADM isoscel $\Longrightarrow \measuredangle DAM = \measuredangle ADM$..1p

ΔADN isoscel $\Longrightarrow \measuredangle DAN = \measuredangle ADN$..1p

$\measuredangle MAN = \measuredangle NDM$...1p

Punctele A, M, D şi N sunt situate pe un cerc $\Longrightarrow \measuredangle MAN$, $\measuredangle NDM$ suplementare.....................1p

$\measuredangle BAC = 90°$ 1p