



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$. Spunem că o submulțime B a mulțimii A este *interesantă* dacă are 3 elemente, dintre care unul este media aritmetică a celorlalte două și există $b \in B$ pentru care $5 \cdot b \in B$.

- Calculați câte submulțimi interesante conțin numărul 225.
- Determinați numărul tuturor submulțimilor interesante ale mulțimii A .

Soluție. Fie $B = \{b, 5b, a\}$. Sunt 3 cazuri:

$$\text{I. } a = \frac{b + 5b}{2} \Rightarrow B = \{b, 3b, 5b\}$$

$$\text{II. } 5b = \frac{a + b}{2} \Rightarrow B = \{b, 5b, 9b\};$$

$$\text{III. } b = \frac{a + 5b}{2} \Rightarrow a + 3b = 0, \text{ nu se poate.} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

a) Deoarece 225 este divizibil cu 3, 5 și 9, el poate fi oricare element al mulțimii B . Obținem astfel următoarele 6 submulțimi interesante:

$$\{225, 675, 1225\}, \{75, 225, 375\}, \{45, 135, 225\}, \{225, 1225, 2025\}, \\ \{45, 225, 405\}, \{25, 125, 225\} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Pentru cazul I, obținem câte o submulțime interesantă pentru fiecare $b \in \mathbb{N}^*$ cu $5b \leq 2025$, deci $2025 : 5 = 405$ submulțimi $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Pentru cazul II, obținem câte o submulțime interesantă pentru fiecare $b \in \mathbb{N}^*$ cu $9b \leq 2025$, deci $2025 : 9 = 225$ submulțimi $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Deoarece $\{x, 3x, 5x\} = \{y, 5y, 9y\}$ implică $x = y$, de unde rezultă $3x = 9y$, obținem o contradicție, așadar nu există submulțimi care să fie simultan și de tip I, și de tip II.

În concluzie, avem $405 + 225 = 630$ submulțimi interesante. $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Problema 2. Fie numerele naturale $a < b < c$, cu proprietatea că $a + b + 2c$ este multiplu comun pentru b și c .

- Arătați că cel mai mare divizor comun al numerelor $a + b$ și c este numărul c .
- Aflați numerele naturale k mai mici ca 1000, știind că $a \cdot b \cdot c = k^2$.

Soluție. a) Din $c \mid a + b + 2c$, cum $c \mid 2c$, obținem $c \mid a + b$. Dar $a < b < c$ implică $a + b < 2c$, deci $a + b = c$. Atunci $(a + b, c) = c$ **2p**

b) Cum $b \mid a + b + 2c$, din a) obținem $b \mid 3a + 3b$. Dar $b \mid 3b$, deci $b \mid 3a$. Însă $3a < 3b$, așadar $3a \in \{b, 2b\}$ **2p**

Cazul I. $3a = b$. Avem $a = n, b = 3n, c = 4n$, de unde $a \cdot b \cdot c = 12 \cdot n^3$. Căutăm valorile lui n astfel încât $2^2 \cdot 3 \cdot n^3 = k^2, k < 1000$, și găsim $n = 3$ care implică $abc = 18^2$, $n = 3 \cdot 2^2$ care implică $abc = 144^2$ și $n = 3^3$ care implică $abc = 486^2$ **2p**

Cazul II. $3a = 2b$, deci există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a = 2p, b = 3p$ de unde obținem $c = 5p$. Atunci $a \cdot b \cdot c = 30 \cdot p^3$, care conduce la $p = 30$, deci $abc = 900^2$ **1p**

Am obținut $k \in \{18, 144, 486, 900\}$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $\sphericalangle BAC = 40^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Notăm cu I intersecția bisectoarelor triunghiului. Arătați că $AI = BC$.

Soluție. Fie $\{D\} = BI \cap AC$. Atunci $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 40^\circ$ deci $\triangle ABD$ este isoscel, de unde rezultă că $AD = BD$ (1) **2p**

Construcția 1. Fie $BM, M \in AC$, bisectoarea $\sphericalangle DBA$ **1p**

Atunci $\sphericalangle ABM = \sphericalangle IAB = 20^\circ$ și AB este latură comună, deci $\triangle IAB \equiv \triangle MBA$ (U.L.U.), de unde $AI = BM$ **2p**

Apoi $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBM = 60^\circ$ și $\sphericalangle MCB = 60^\circ$, deci triunghiul MBC este echilateral, de unde $BC = BM = AI$ **2p**

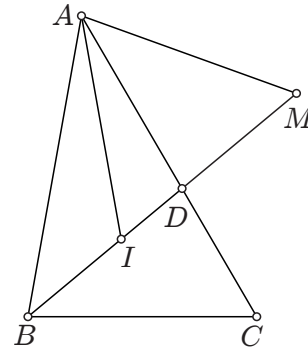
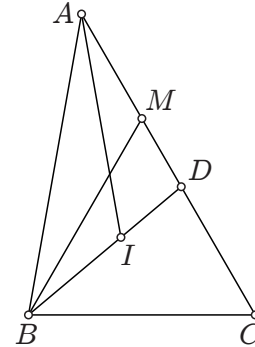
Construcția 2. Fie triunghiul echilateral $\triangle AMI, D \in (IM)$ **1p**

Cum $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAI - \sphericalangle IAD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, obținem $\sphericalangle MAD = \sphericalangle DBC$ (2) . **1p**

Din (1),(2) și $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DCB = 60^\circ$ rezultă $\triangle ADM \equiv \triangle BDC$ (U.L.U.) de unde $AM = BC$ **2p**

Dar $\triangle AMI$ echilateral implică $AI = AM$, deci $AI = BC$ **1p**

Observație Următoarele două construcții nu folosesc relația (1). Punctajul obținut pentru fiecare dintre ele nu se cumulează cu punc-



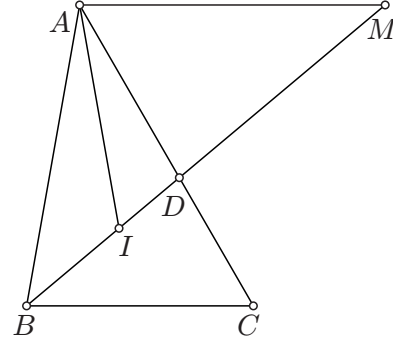
tajul asociat demonstrării relației (1), elevii primind maximum dintre cele două punctaje.

Construcția 3. Fie $AM \parallel BC$, $M \in BI$ **1p**

Atunci $\sphericalangle AMB = \sphericalangle MBC$ (alterne interne), care implică $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AMB = 40^\circ$, deci $\triangle ABM$ isoscel, de unde $AB = AM$ (2) **2p**

Cum $\sphericalangle CAM = \sphericalangle ACB = 60^\circ$, fiind unghiuri alterne interne, obținem $\sphericalangle IAM = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \sphericalangle ABC$ (3) **1p**

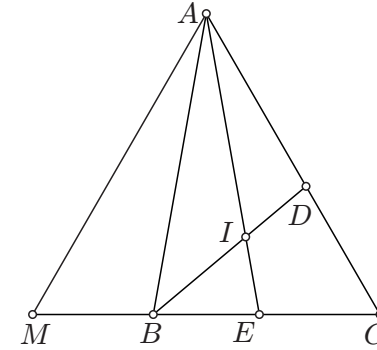
Din (2), (3) și $\sphericalangle AMI = \sphericalangle BAC = 40^\circ$ rezultă $\triangle AMI \equiv \triangle BAC$ (U.L.U.) care implică $AI = BC$ **3p**



Construcția 4. Fie triunghiul echilateral $\triangle ACM$, $B \in (MC)$ **1p**

Din $CA = CM$, $\sphericalangle ICA = \sphericalangle ICM = 30^\circ$ și IC latură comună rezultă $\triangle CIA \equiv \triangle CIM$ (L.U.L.), de unde obținem $IA = IM$ (2) și $\sphericalangle IAC = \sphericalangle IMC = 20^\circ$ **2p**

Fie $\{E\} = AI \cap BC$. Din $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAC - \sphericalangle BAC = 20^\circ$, $AM = MC$ și $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACE = 60^\circ$ obținem $\triangle MAB \equiv \triangle CAE$ (U.L.U.) de unde rezultă $MB = EC$, ceea ce implică $ME = BC$ (3) **2p**



În triunghiul $\triangle AEM$, $\sphericalangle AEM = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$, așadar, în triunghiul $\triangle MIE$, $\sphericalangle MIE = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ = \sphericalangle MEI$, deci $\triangle MIE$ isoscel, de unde rezultă $MI = ME$ (4) **1p**

Din relațiile (2), (3) și (4) obținem $IA = IM = ME = BC$ **1p**

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care toate celulele unui tablou $n \times n$ se pot colora cu diferite culori astfel încât orice celulă are exact alte două celule cu care este vecină și care au aceeași culoare cu ea. Prin celule vecine înțelegem două celule care au o latură comună.

Soluție.

Fixăm una dintre culori. Plecând de la o celulă oarecare a tabloului, putem parcurge un traseu monocolor (întrucât fiecare celulă are exact două celule vecine colorate la fel) astfel încât să ajungem înapoi în celula din care

am plecat. Dacă, prin absurd, am ajunge în altă celulă a traseului, una prin care am trecut deja, atunci aceasta ar avea cel puțin trei celule vecine de aceeași culoare.....**2p**

Orice astfel de traseu reprezintă un ciclu închis. Marcăm alternativ celulele tabloului asemenea unei table de șah. Observăm că, la fiecare pas, marcajul celulei în care ne aflăm se schimbă. Prin urmare, deoarece ne întoarcem în celula din care am plecat, pentru fiecare astfel de ciclu, deducem faptul că lungimea sa va fi pară.....**2p**

Cum fiecare celulă a tabloului face parte dintr-un unic astfel de traseu, rezultă că numărul total de celule este par, deci n este par.....**1p**

Orice tablou $n \times n$, cu n par, se poate împărți în pătrate 2×2 . Pentru fiecare astfel de pătrat alegem o culoare distinctă și colorăm cu această culoare toate cele 4 celule ale sale. Tabloul astfel colorat verifică condițiile problemei, deci n este orice număr natural par nenul.**2p**