

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Model aprilie 2025
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

1.	$6^2 = (x+1)(7x-2)$ $7x^2 + 5x - 38 = 0$ care are soluția reală pozitivă $x = 2$	2p 3p
2.	$(f \circ f)(1) = f(-1) = 3$ $f(a-3) = -2a+7$ $-2a+7 = 3 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{R}$	3p 2p
3.	$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 16 = 76$ $2^x \cdot 19 = 76 \Rightarrow x = 2$	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale impare de 3 cifre are 450 elemente, deci avem 450 cazuri posibile Din acestea sunt 15 numere cu cifra sutelor tripla cifrei zecilor, deci 15 cazuri favorabile. Probabilitatea este $\frac{1}{30}$	2p 3p
5.	$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$ și $y_A + y_C = y_B + y_D$ Se obține $x_D = 1, y_D = -4 \Rightarrow D(1, -4)$	3p 2p
6.	$AM = 5 \Rightarrow BC = 10$ iar $AC = 8$ $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, A^2(1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2, A^4(1) = 16I_2$ $A^4(1) - 4A^2(1) = 16I_2 - 16I_2 = O_2$	3p 2p
b)	$\det A(a) = -10a^2 - 2a + 8$ Matricea este inversabilă pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, \frac{4}{5} \right\}$	2p 3p
c)	$A^2(1)[A(a) + A(b)] = 4I_2 \cdot \begin{pmatrix} 3a+3b & a+b-4 \\ a+b+8 & -3a-3b \end{pmatrix}$	2p

	$4 \begin{pmatrix} 3a+3b & a+b-4 \\ a+b+8 & -3a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 32 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b=0 \text{ deci există o infinitate de}$ numere reale a și b pentru care are loc relația cerută	3p
2.a)	$a_{2025} + a_{2024} + \dots + a_1 + a_0 = f(1)$ $f(1) = -1 + 1 + 1 = 1 \in \mathbb{N}$	2p 3p
b)	$g = (X-1)(X-3)$ $g : (X-1)$	3p 2p
c)	Restul împărțirii lui f la g este de forma $aX + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Din teorema împărțirii cu rest avem $f(1) = a + b = 1, f(3) = 3a + b = 5 \Rightarrow a = 2, b = -1 \text{ deci restul este } 2X - 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\ln x)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{-1-x}{x^2} = -\frac{x+1}{x^2}, x \in (0, \infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ iar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ deci graficul funcției nu admite asimptote orizontale și oblice	2p 3p
c)	$f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci funcția f este strict decrescătoare pe $(0, \infty)$ $x \leq x^{2025}, \forall x \in [1, \infty)$ și atunci avem $f(x) \geq f(x^{2025}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x \geq \frac{1}{x^{2025}} - 2025 \ln x$ $\Rightarrow 2024 \ln x \geq \frac{1 - x^{2024}}{x^{2025}}, \text{ pentru orice } x \in [1, \infty)$	3p 2p
2.a)	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = g(x), x \in (-1, 1)$ Cum funcția f este derivabilă pe $(-1, 1) \Rightarrow$ funcția f este o primitivă a funcției g	3p 2p

b)	$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = f(x) \Big _0^{\frac{1}{2}} =$ $= \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 + 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$	2p 3p
c)	Cum $f'(x) = g(x) > 0$, $\forall x \in (-1,1)$ atunci f este strict crescătoare pe $(-1,1)$ $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx < \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	2p 3p