

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Model aprilie 2025
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1) Determinați numărul real pozitiv x pentru care numerele $x+1$, 6 și $7x-2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. |
| 5p | 2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x+1$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(1) = f(a-3)$. |
| 5p | 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+4} = 76$ |
| 5p | 4) Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale impare de 3 cifre, cifra sutelor să fie triplul cifrei zecilor. |
| 5p | 5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(3, 5)$ și $C(2, 2)$. Determinați coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. |
| 5p | 6) Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB = 6$ și mediana $AM = 5$. Calculați $\cos C$. |

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1) Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3a & a-2 \\ a+4 & -3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $A^4(1) - 4A^2(1) = O_2$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a știind că matricea $A(a)$ este inversabilă. |
| 5p | c) Demonstrați că există o infinitate de numere reale a și b pentru care $A^2(1)[A(a) + A(b)] = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}$ |
| | 2) Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-2)^{2025} + X+1$, cu forma algebrică $f = a_{2025}X^{2025} + a_{2024}X^{2024} + \dots + a_1X + a_0$ și $g = X^2 - 4X + 3$. |
| 5p | a) Arătați că suma $a_{2025} + a_{2024} + \dots + a_1 + a_0$ este un număr natural. |
| 5p | b) Demonstrați că polinomul g este divizibil cu $(X-1)$. |
| 5p | c) Determinați restul împărțirii polinomului f la g . |

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$. |
| a) | Arătați că $f'(x) = -\frac{x+1}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$. |

5p b) Arătați că există o singură asimptotă la graficul funcției f .

5p c) Demonstrați că $2024 \ln x \geq \frac{1-x^{2024}}{x^{2025}}$ pentru orice $x \in [1, \infty)$.

2) Se consideră funcțiile $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$

și $g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

5p a) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Calculați $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.