

EXERCIȚII DE ANTRENAMENT
EVALUARE NAȚIONALĂ 2025

Matematică

SUGESTII DE REZOLVARE

Notă: Materialul conține câteva probleme cu nivel ridicat de dificultate, deci se adresează în special elevilor care vor să obțină notă maximă, dar poate fi analizat de toți absolvenții de clasa a VIII-a. MULT SUCCES !!!

Subiectul al III-lea, exercițiul 1.

1. Pe două tăvi sunt așezate 100 de brișe. După ce de pe prima tavă se iau 17 brișe și de pe cea de a doua tavă se iau 23 de brișe, pe prima tavă rămân de trei ori mai multe brișe decât pe cea de a doua tavă.

- a) Este posibil ca cele două tăvi să aibă număr egal de brișe? Justificați răspunsul dat.

Soluție: Dacă în cele două tăvi ar fi un număr egal de brișe, atunci fiecare tavă ar conține $100 : 2 = 50$ brișe.

$$50 - 17 = 33 \text{ (brișe rămase în prima tavă)}$$

$$50 - 23 = 27 \text{ (brișe rămase în a doua tavă).}$$

Acum avem informația că pe prima tavă rămân de trei ori mai multe brișe decât pe tava a doua, deci ar trebui ca $33 = 3 \cdot 27$ (FALS). Așadar, nu este posibil ca cele două tăvi să aibă număr egal de brișe

- b) Determinați numărul de brișe aflate inițial pe prima tavă.

Soluție:

1. Metodă aritmetică !!!

$100 - 17 - 23 = 60$ (din numărul total de brișe din cele două tăvi se iau 17 brișe și alte 23 brișe), avem acum informația că în cele două tăvi au rămas 60 brișe.

/---/---/---/ (prima tavă)

/---/ (a doua tavă).

$60 : 4 = 15$ (un segment), deci pe tava a doua au rămas 15 brișe.

$15 \cdot 3 = 45$ (trei segmente), sunt astfel 45 brișe rămase pe tava a doua.

Numărul de brișe aflate inițial pe prima tavă este $45 + 17 = 62$.

2. Metodă algebrică !!!

Fie a = număr briose de pe prima tavă și b = număr briose de pe a doua tavă.

Avem $a + b = 100$.

Iau 17 briose de pe prima tavă, rămân deci $a - 17$ briose.

Iau 23 briose de pe a doua tavă, rămân deci $b - 23$ briose.

Știm acum că pe prima tavă sunt de trei ori mai multe briose decât pe a doua tavă, deci

$$a - 17 = 3 \cdot (b - 23).$$

Obținem în final sistemul de ecuații $\begin{cases} a + b = 100 \\ a - 17 = 3 \cdot (b - 23) \end{cases}$ cu soluția unică $a = 62$

și $b = 38$.

2. Pe două rafturi se află cărți. Pe primul raft sunt de 4 ori mai multe cărți decât pe al doilea raft. Dacă s-ar lua 14 cărți de pe primul raft și s-ar așeza pe al doilea raft, atunci numărul cărților de pe al doilea raft ar fi egal cu două treimi din numărul cărților rămase pe primul raft.

a) Este posibil să fie 8 cărți pe al doilea raft? Justificați răspunsul dat.

Soluție: Dacă ar fi 8 cărți pe al doilea raft, pe primul raft ar fi $4 \cdot 8 = 32$ cărți.

$32 - 14 = 18$ (cărți rămase pe primul raft)

$8 + 14 = 22$ (cărți obținute pe al doilea raft) și $22 \neq \frac{2}{3} \cdot 18$, deci NU este posibil ca pe al doilea raft să fie 8 cărți.

b) Determinați numărul de cărți de pe primul raft.

Aritmetic:

/-- /-- /-- /-- /.....cărțile de pe primul raft.

/-- /.....cărțile de pe al doilea raft

Se observă foarte ușor, din textul problemei, că trebuie să ajungem la următoarea reprezentare:

/-- /-- /-- /

/-- /-- /, deci cele 14 cărți mutate de pe raftul 1 pe raftul al doilea reprezintă de fapt un segment.

Așadar, pe raftul 1 sunt $14 \cdot 4 = 56$ cărți și pe raftul 2 sunt 14 cărți.

Algebric:

Fie „a,, număr cărți de pe raftul 1 și „b,, număr cărți de pe raftul al doilea.

$a = 4b$ și $b + 14 = \frac{2}{3} \cdot (a - 14)$, de unde se obține ușor că $a = 56$ și $b = 14$.

RECOMANDARE!!!

Scriu întâi numărul de cărți obținut după transfer de pe fiecare raft, apoi scriu ecuația (textul problemei NU este unul tocmai simplu).

Subiectul al III-lea, exercițiul 2.

1. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x+2}{x-2} + \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) \cdot \frac{x-2}{x+1}$, unde x este număr real, $x \neq -1$ și $x \neq 2$.

(2p) a) Arată că $E(x) = \frac{2x}{x-2}$, pentru orice număr real x , $x \neq -1$ și $x \neq 2$.

Soluție:

-calculul sumei din paranteză mă conduce la $\frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$.

- calculez produsul și obțin 1.

-finalizare

(3p) b) Determinați numerele naturale n pentru care numărul $E(n)$ este număr natural.

Metoda 1. (scoaterea întregilor din fracție)

$$\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = \frac{2(n-2)}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} \text{ (până aici totul simplu și frumos).}$$

Acum sunt mari șanse SĂ GREȘIM!

-trebuie să ținem cont că $2 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n-2 \in D_4$ și $\frac{4}{n-2} \geq -2$ (din cauză că avem 2 întregi), deci $n-2 \in \{-2, -1, 1, 2, 4\}$, de unde $n \in \{0, 1, 3, 5\}$.

Obs: am fi pierdut soluția $n = 0$, dacă n-am fi gândit riguros și n-am fi luat în calcul ce am scris cu albastru.

Metoda 2. (proprietățile divizibilității)

$$\frac{2n}{n-2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n - 2/2n \quad (1)$$

$$\text{Dar } n - 2/2(n-2), \text{ adică } n - 2/2n - 4 \quad (2)$$

(1) - (2) conduce la $n - 2/4$, adică $n - 2 \in D_4$ și se continuă ca mai sus, cu aceeași observație datorită numărului de întregi.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(1 + \frac{3}{x^2 - 4x}\right) : \frac{x^2(x-1)(x-3)}{x(x-4)}$, unde x este număr real, $x \neq 0$ și $x \neq 1, x \neq 3, x \neq 4$.

(2p) a) Arată că $E(x) = \frac{1}{x^2}$, pentru orice număr real x , $x \neq 0$ și $x \neq 1, x \neq 3, x \neq 4$.

Soluție:

-calculul din paranteză mă conduce la $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)}$.

-efectuând împărțirea celor două rapoarte, se obține exact ce trebuie.

(3p) b) Arătați că $E(2023) + E(2024) + E(2025) < \frac{1}{674 \cdot 2025}$.

Soluție:

$$E(2023) + E(2024) + E(2025) = \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$$

-se observă că prin calcul direct NU este deloc ce trebuie. Deci NU încercăm degeaba.

Folosim tehnica (puțin mai „facultativă”, ce e drept) de la clasa a V-a:

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{K \cdot K} < \frac{1}{(K-1) \cdot K}, \text{ pentru oricare } K \text{ număr natural mai mare sau egal cu } 2.$$

Așadar,

$$\frac{1}{2023^2} = \frac{1}{2023 \cdot 2023} < \frac{1}{2022 \cdot 2023} \quad (1)$$

(inegalitatea este evidentă dacă ne gândim la compararea fracțiilor ordinare care au același numărător)

$$\frac{1}{2024^2} = \frac{1}{2024 \cdot 2024} < \frac{1}{2023 \cdot 2024} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2025^2} = \frac{1}{2025 \cdot 2025} < \frac{1}{2024 \cdot 2025} \quad (3).$$

Din (1) + (2) + (3) obținem $\frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2} < \frac{1}{2022 \cdot 2023} + \frac{1}{2023 \cdot 2024} + \frac{1}{2024 \cdot 2025}$.

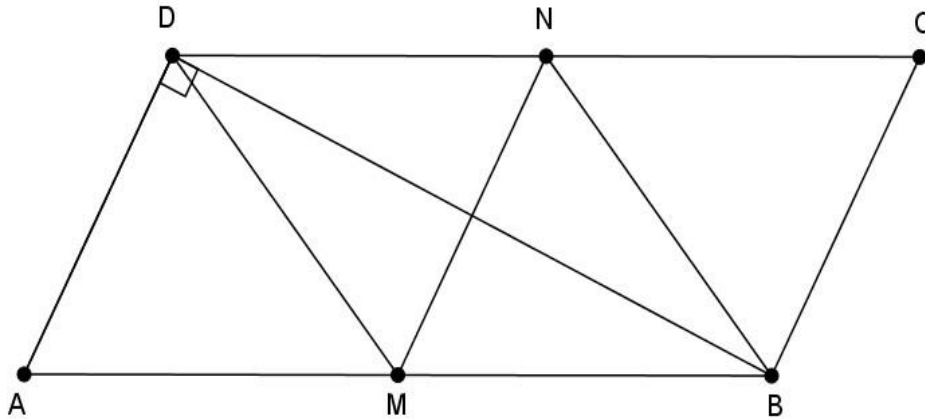
$$\begin{aligned} \text{Calculăm acum } \frac{1}{2022 \cdot 2023} + \frac{1}{2023 \cdot 2024} + \frac{1}{2024 \cdot 2025} &= \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} = \\ &= \frac{1}{2022} - \frac{1}{2025} = \frac{3}{2022 \cdot 2025} = \frac{1}{674 \cdot 2025}, \text{ deci se confirmă inegalitatea din enunț.} \end{aligned}$$

Subiectul al III-lea, exercițiile 4 și 5.

1. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD \perp DB$, $AB = 2BC$ și punctele M și N , mijloacele laturilor AB , respectiv CD .

- a) Arătați că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este de două ori mai mare decât perimetrul triunghiului AMD .
- b) Demonstrați că triunghiul MBN este echilateral.

Soluție:



- a) $\triangle ADB$ dreptunghic în D

DM mediană corespunzătoare ipotenuzei, deci obținem $DM = AM = MB = x, x > 0$.

Dar $AB = 2BC$

$BC = AD$ (opuse în paralelogram), deci $AD = BC = AM = MB = DM = x$.

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2x + x + 2x + x = 6x$$

$$P_{AMD} = x + x + x = 3x, \text{ deci } P_{ABCD} = 2 \cdot P_{AMD}.$$

Observație: se poate aplica și reciproca teoremei unghiului de 30 grade în triunghiul ADB și se dovedește că triunghiul ADM este echilateral.

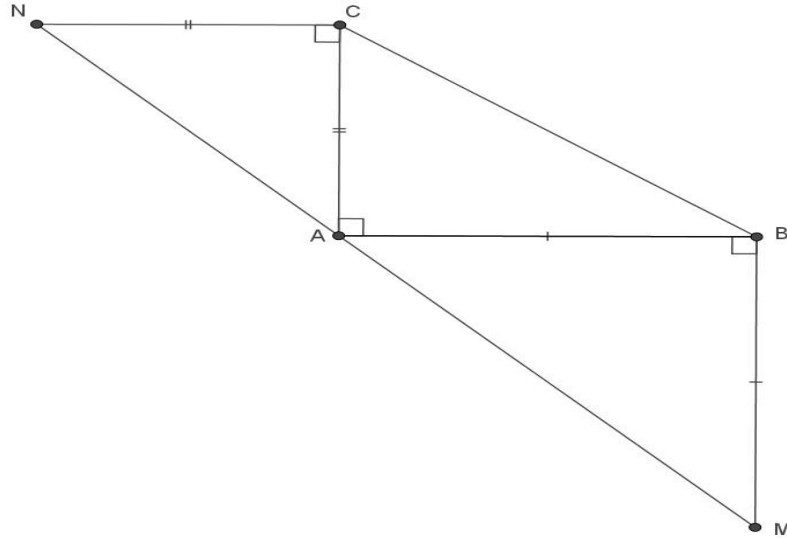
- b) Din notațiile de mai sus și ținând cont de poziția punctelor M și N pe laturile AB și CD , se obține că $MBCN$ este paralelogram (chiar romb), pentru că $CN = MB = BC = x$ și $NC \parallel BM$.

Folosind acum observația de mai sus, avem că unghiul BCN are măsura de 60 grade, deci triunghiul BCN este echilateral (isoscel cu măsura unui unghi de 60 grade).

2. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , punctele M și N situate în semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A , astfel încât $MB \perp AB$, $MB = AB$ și $NC \perp AC$, $NC = AC$.

a) Arătați că punctele M, A și N sunt coliniare.

Soluție:



Soluție:

a) Triunghiurile ABM și ACN sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow m(\angle MAB) = m(\angle CAN) = 45^\circ$
 $m(\angle MAN) = m(\angle MAB) + m(\angle BAC) + m(\angle CAN) = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, deci punctele M , A și N sunt coliniare

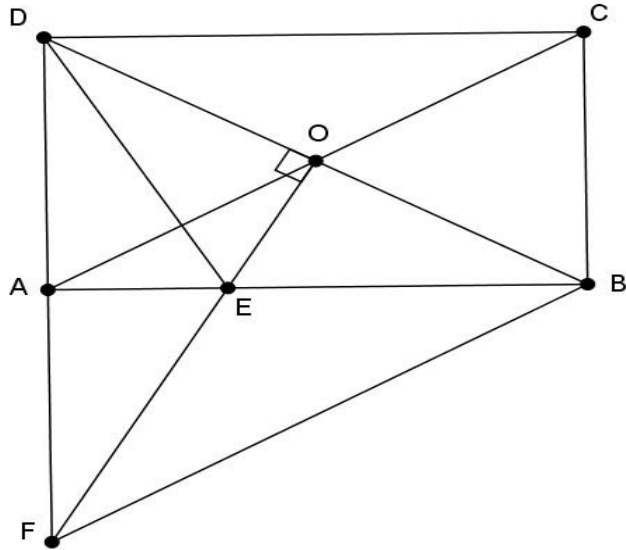
b) Demonstrați că $MN = \sqrt{2}(AB + AC)$.

$$MB = AB \text{ și } AM^2 = AB^2 + MB^2 \Rightarrow AM = AB\sqrt{2}$$

$$NC = AC \text{ și } AN^2 = AC^2 + NC^2 \Rightarrow AN = AC\sqrt{2}, \text{ deci } MN = AM + AN = \sqrt{2}(AB + AC)$$

3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ și punctul O , intersecția diagonalelor AC și BD . Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB și AD în punctele E , respectiv F .

a) Arătați că aria patrulaterului $AFBC$ este egală cu $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



Soluție:

a) FO este mediatoarea segmentului $BD \Rightarrow \triangle DFB$ este isoscel și, cum unghiul ADB are măsura egală cu 60° , obținem că $\triangle DFB$ este echilateral

$BA \perp DF$, deci A este mijlocul lui $DF \Rightarrow AF = 5 \text{ cm}$

$AFBC$ paralelogram, deci $\mathcal{A}_{AFBC} = AB \cdot BC = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) Determinați măsura unghiului format de dreptele AC și DE .

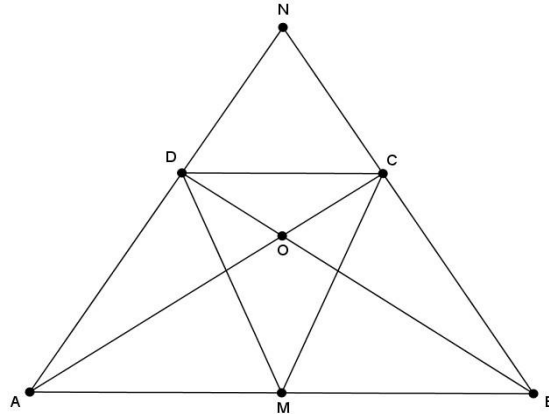
$\because AFBC$ paralelogram, deci $AC \parallel FB$

$BA \perp DF$, $FO \perp BD$ și $\{E\} = BA \cap FO \Rightarrow E$ este ortocentrul $\triangle DFB$

$DE \perp FB$, deci unghiul format de dreptele AC și DE are măsura de 90°

4. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul M aparținând laturii AB astfel încât $\triangle AMC \equiv \triangle DMB$.

a) Arătați că punctul M este mijlocul laturii AB .



Soluție:

a) $\triangle AMC \equiv \triangle DMB \Rightarrow AC = DB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \angle DAM = \angle CBM$.
 Triunghiurile AMD și BMC sunt isoscele cu vârful în M , deci $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$, de unde obținem $MA = MB$.

b) Demonstrați că $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$, unde $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{N\}$.

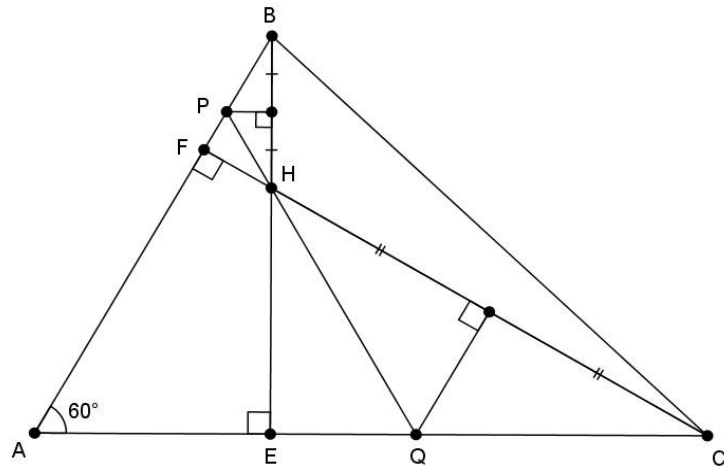
$ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow OA = OB$ și, cum M este mijlocul lui AB , obținem $OM \perp AB$; $\triangle ANB$ isoscel, punctul M este mijlocul lui $AB \Rightarrow NM \perp AB$, deci punctele N , O și M sunt coliniare.

$MA = MC = MB \Rightarrow MC = \frac{AB}{2}$, deci triunghiul ACB este dreptunghic în C .

$\triangle NCO \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{CN}{MN} = \frac{OC}{BM}$ și, cum $OC = OD$ și $BM = MD$, obținem $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$.

5. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB < AC$ și unghiul A are măsura de 60° . Înălțimile BE , cu $E \in AC$ și CF , cu $F \in AB$, ale triunghiului ABC se intersectează în punctul H . Mediatoarea segmentului BH intersectează latura AB în punctul P și mediatoarea segmentului CH intersectează latura AC în punctul Q .

a) Arătați că $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$.



Soluție:

a) $BE \perp AC \Rightarrow \triangle ABE$ este dreptunghic, deci $\cos(\angle BAE) = \frac{AE}{AB}$ și, cum $\angle BAE$ are măsura

de 60° , obținem $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$

$CF \perp AB \Rightarrow \triangle AFC$ este dreptunghic, deci $\cos(\angle CAF) = \frac{AF}{AC}$ și, cum $\angle CAF$ are măsura de

60° , obținem $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{AB}$

b) Demonstrați că $BP + CQ = PQ$.

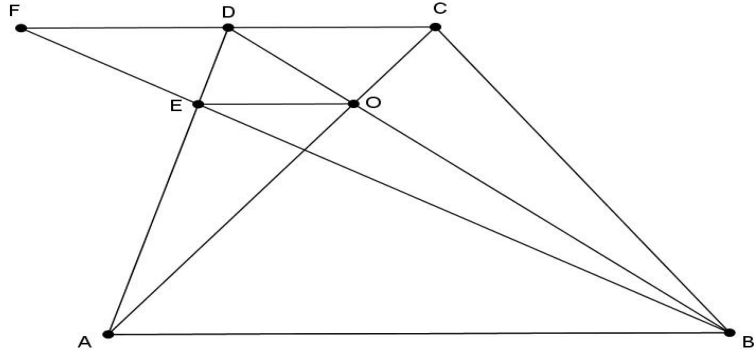
P aparține mediatoarei segmentului BH , deci $BP = PH$ și Q aparține mediatoarei segmentului CH , deci $CQ = HQ$, deci $BP + CQ = PH + HQ$

$\angle BHF$ și $\angle CHE$ au măsura de 60° și, cum $\angle BHP$ are măsura de 30° și $\angle CHQ$ are măsura de 30° , obținem că $(HP$ și HQ sunt bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf, deci sunt semidrepte opuse

P , H și Q sunt coliniare în această ordine, deci $PH + HQ = PQ$, de unde $BP + CQ = PQ$

6. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 12 \text{ cm}$, $CD = 4 \text{ cm}$, $AC \cap BD = \{O\}$, punctul $E \in AD$ astfel încât $OE \parallel AB$ și se notează cu F intersecția dreptelor BE și DC .

a) Arătați că $OE = 3 \text{ cm}$.



Soluție:

$$\text{a) } AB \parallel CD \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{AO}{CO} = 3, \text{ deci } \frac{AO}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$OE \parallel CD \Rightarrow \triangle AOE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{OE}{CD} \Rightarrow OE = 3 \text{ cm}$$

b) Demonstrați că $DC = DF$.

$$OE \parallel DF \Rightarrow \triangle BOE \sim \triangle BDF \Rightarrow \frac{OE}{DF} = \frac{BO}{BD}$$

$$\text{Deoarece } \frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \text{ și } \frac{BO}{BD} = \frac{AO}{AC}, \text{ obținem } DF = CD$$

MULT SUCCES TUTUROR PARTICIPANȚILOR!!!